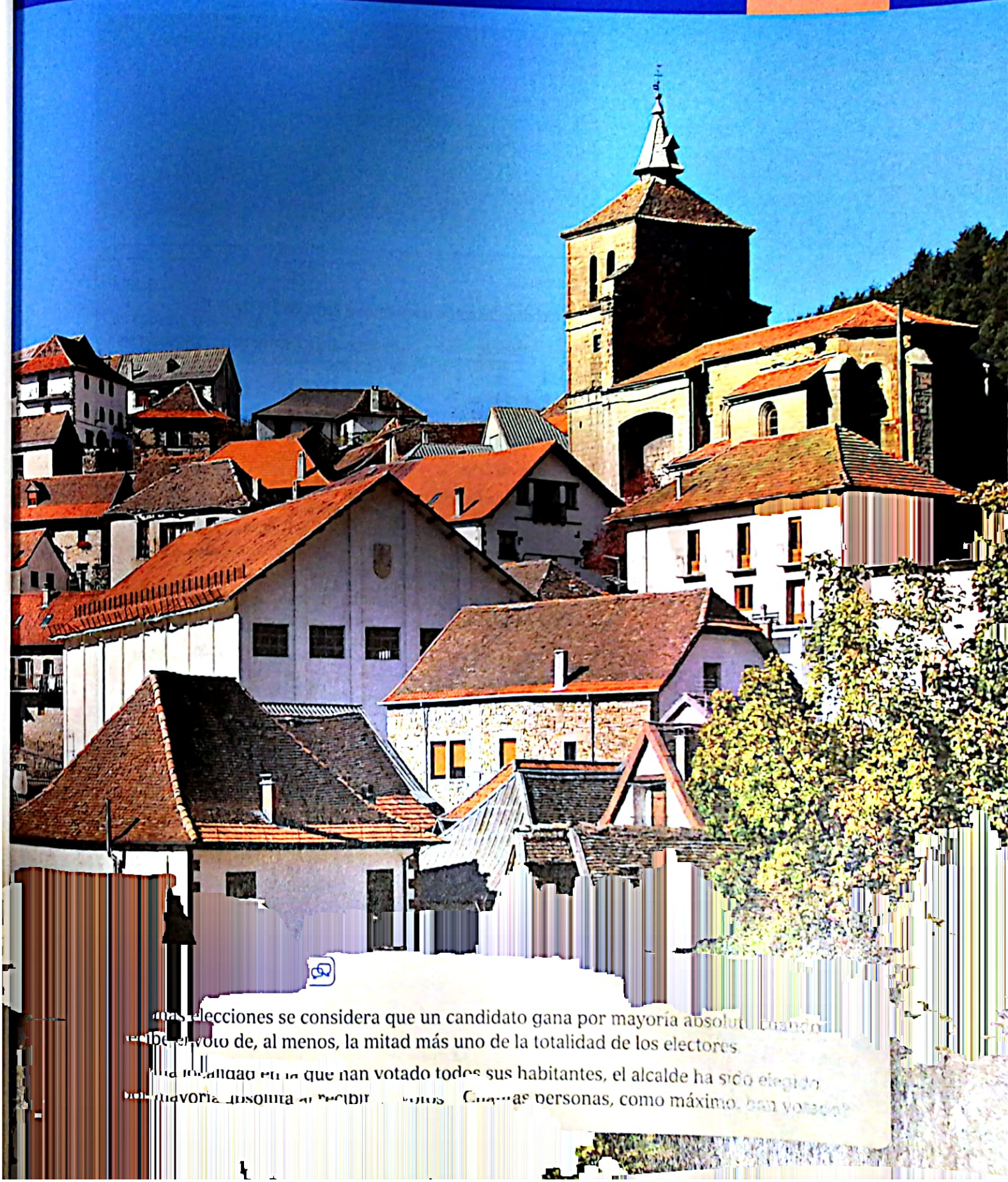
Ecuaciones y sistemas

4



...elecciones se considera que un candidato gana por mayoría absolut... ...voto de, al menos, la mitad más uno de la totalidad de los electores

...localidad en la que han votado todos sus habitantes, el alcalde ha sido elegido por mayoría absoluta al recibir ... votos. Cuantas personas, como máximo, han votado?

Scanned by CamScanner

1 Ecuaciones de primer grado

Una **ecuación de primer grado** es una igualdad de dos expresiones algebraicas, con x como incógnita. Estas dos expresiones se llaman **miembros** de la ecuación; la que está a la izquierda se llama primer miembro, y la que está a la derecha, segundo miembro.

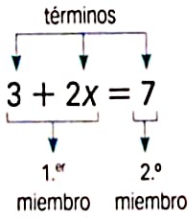
Los sumandos de las expresiones se llaman **términos** de la ecuación.

EJEMPLOS

1. Identifica las partes que forman la ecuación $3 + 2x = 7$.

$$\underbrace{3 + 2x}_{\text{1.er miembro}} = \underbrace{7}_{\text{2.º miembro}}$$

términos



Los números 3 y 7 son términos independientes de la ecuación.

La ecuación es de primer grado, porque la incógnita x está elevada a 1. El **grado de una ecuación** es el máximo exponente con que aparece la x.

2. Resuelve la ecuación $x + 1 = 5$.

Resolver una ecuación es hallar el valor de la incógnita x, tal que al sustituirlo en la igualdad hace que sea verdadera. Ese valor de x se llama **solución de la ecuación**.

Para encontrar la solución podemos probar con diferentes valores de x hasta encontrar el que hace verdadera la igualdad.

$$x + 1 = 5 \rightarrow \begin{cases} \text{Si } x = 0 \rightarrow 0 + 1 \neq 5 & \text{No es solución} \\ \text{Si } x = 1 \rightarrow 1 + 1 \neq 5 & \text{No es solución} \\ \text{Si } x = 2 \rightarrow 2 + 1 \neq 5 & \text{No es solución} \\ \text{Si } x = 3 \rightarrow 3 + 1 \neq 5 & \text{No es solución} \\ \text{Si } x = 4 \rightarrow 4 + 1 = 5 & \text{Es solución} \\ \ldots \end{cases}$$

La solución es $x = 4$, el único valor de x que verifica la igualdad.

ACTIVIDADES

1 Identifica los términos de estas ecuaciones.

a) $x - 2 = 2x + 3$

b) $3 + x - \frac{1}{2}x = x$

c) $5x + \frac{1}{2} \cdot 3x = 4x - 1$

d) $3 \cdot (2x - 4) = x - 1$

2 ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones tienen como solución $x = 2$?

a) [illegible]

b) [illegible]

c) $2 \cdot (x + 2) - x = x + 4$

d) $4x - 2 = 1 + x$

3 Comprueba si las soluciones dadas para las siguientes ecuaciones son correctas.

a) $2 \cdot (x - 3) - (x + 2) = 1$; $x = 7$

b) $2 + 3 \cdot (2x - 1) = x + 4$; $x = 2$

c) $4 - 2x = 5 \cdot (x + 2) - 6$; $x = 0$

4 Resuelve, probando con diferentes valores de x, las siguientes ecuaciones.

a) $4x + 2 = 5x - 1$

b) $3 \cdot (x + 1) = 4x + 1$

Scanned by CamScanner

2 Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución.

Para obtener una ecuación equivalente a otra ecuación se pueden utilizar dos métodos:

- **Sumar o restar el mismo número a los dos miembros de la ecuación (método de la suma).**
- **Multiplicar o dividir por el mismo número los dos miembros de la ecuación (método del producto).**

EJEMPLOS

3. Resuelve la ecuación $x - 3 = 5 - 3$.

Sumamos 3 a los dos miembros y resolvemos las operaciones:

$$x - 3 + 3 = 5 - 3 + 3 \rightarrow x = 5$$

Así, obtenemos directamente la solución. Es un método más rápido y sencillo que probando con diferentes valores de x.

4. Resuelve $x + 3x - 5 = 3x + 3$.

Restamos $3x$ a los dos miembros:

$$x + 3x - 5 - 3x = 3x + 3 - 3x \rightarrow x - 5 = 3$$

Ahora sumamos 5 a los dos miembros:

$$x - 5 + 5 = 3 + 5 \rightarrow x = 8$$

5. Calcula x en la ecuación $\frac{x}{2} = 5$.

Multiplicamos por 2 los dos miembros:

$$2 \cdot \frac{x}{2} = 2 \cdot 5 \rightarrow x = 10$$

6. Resuelve la ecuación $3x - 2 = x + 2$.

Primero sumamos 2 y luego restamos x a los dos miembros:

$$3x - 2 + 2 = x + 2 + 2 \rightarrow 3x = x + 4$$

$$3x - x = x + 4 - x \rightarrow 2x = 4$$

Y, por último, dividimos entre 2: $\frac{2x}{2} = \frac{4}{2} \rightarrow x = 2$

ACTIVIDADES

5 Transforma la primera ecuación en la segunda con el método de la suma y del producto.

a) $6x - x + 3 = 2x + 9 \rightarrow 3x = 6$

b) $3 - 2x + 4x - x = 5 - x \rightarrow 2x = 2$

c) $\frac{3}{4}x + 1 = \frac{1}{4}x + 3 \rightarrow x = 4$

6 Utiliza los métodos de la suma y del producto para resolver las siguientes ecuaciones.

a) $5x + 8x - 7x - 6 = 4x + 2$

b) $4x + 12 - 3x - 6 = 4x + 3$

c) $\frac{x}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{4x}{3} - 2 = x - 1$

Scanned by CamScanner

3 Método general de resolución de ecuaciones de primer grado

Para resolver una ecuación de primer grado agrupamos en un miembro todos los términos con x, y en el otro todos los términos independientes.

Para hacerlo se utilizan los métodos de la suma y el producto que en la práctica se resumen como:

- Si un término está sumando en un miembro, *pasa* restando al otro. Y si está restando, *pasa* sumando.
- Si un número multiplica a un miembro, *pasa* dividiendo al otro. Y si está dividiendo, *pasa* multiplicando.

Cuando la x se queda sola en un miembro, y en el otro miembro solo hay números, diremos que **hemos despejado la x**. Su valor numérico es la solución de la ecuación.

EJEMPLO

7. Resuelve estas ecuaciones.

a) $x + 6 = 9$

Agrupamos los términos con x en el primer miembro y los números en el segundo. El 6, que está sumando en el primer miembro, *pasa* restando al segundo:

$$x \boxed{+ 6} = 9 \rightarrow x = 9 - 6 \rightarrow x = 3$$

Pasa restando

La solución de la ecuación es $x = 3$.

b) $4x - 1 = 2x + 3$

Pasamos el 1 del primer miembro al segundo, y el $2x$ del segundo al primer miembro.

$$4x \boxed{- 1} = 2x + 3 \rightarrow 4x \boxed{- 2x} + 3 + 1 \rightarrow 4x - 2x = 3 + 1$$

Pasa sumando *Pasa* restando

Resolvemos las operaciones en ambos miembros:

$$4x - 2x = 3 + 1 \rightarrow 2x = 4$$

Despejamos la x *pasando* el 2 del primer miembro al segundo:

$$2x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{2} \rightarrow x = 2$$

La solución de la ecuación es $x = 2$.

ACTIVIDADES

7 Resuelve estas ecuaciones.

a) $x + 1 = 15$

b) $x - 9 = 9$

c) $2x + 3 = 7$

d) $5x - 3 = 17$

e) $8x + 3 = 11$

f) $2x - 5 = x + 1$

8 Halla la solución de las siguientes ecuaciones.

a) $-2x + 4 = x + 1$

b) $x - 8 = 2x - 6$

c) $8x - 2 = 10x$

d) $2x - 1 = x - 1$

e) $3x - 4 = 2x + 2$

f) $5x = x + 4$

Scanned by CamScanner

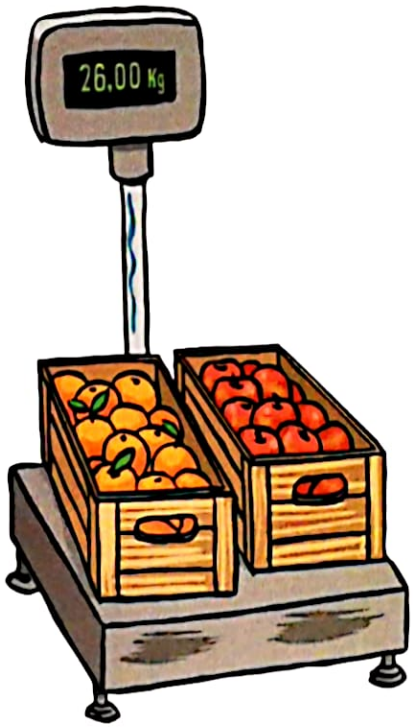
4 Resolución de problemas con ecuaciones de primer grado

Algunos problemas pueden resolverse por medio de una ecuación. Para ello, es importante seguir estos pasos:

- **Comprender** el enunciado e **identificar** la incógnita.
- **Plantear** la ecuación que representa el problema.
- **Resolver** la ecuación.
- **Comprobar** el resultado.

EJEMPLO

8. En una frutería hay una caja con naranjas y otra con manzanas. La caja de naranjas pesa 4 kg más que la caja de manzanas. Si entre las dos pesan 26 kg, ¿cuánto pesa la caja de manzanas?



- Comprendemos el enunciado e identificamos la incógnita.

Lo que sabemos...	Lo que no sabemos...
– La caja de naranjas pesa 4 kg más que la de manzanas. – Entre las dos cajas pesan 26 kg.	– El peso de la caja de manzanas.

Peso de la caja de manzanas → x (incógnita)

- Planteamos la ecuación.

Peso de la caja de manzanas → x

La caja de naranjas pesa 4 kg más que la de manzanas → $x + 4$

Entre las dos cajas pesan 26 kg → $\underbrace{x}_{\text{Caja de manzanas}} + \underbrace{x+4}_{\text{Caja de naranjas}} = 26$

- Resolvemos la ecuación.

Agrupamos los términos con x en un miembro y los números en el otro.

$x + x + 4 = 26 \rightarrow x + x = 26 - 4$

Resolvemos las operaciones en ambos miembros y despejamos x:

$x + x = 26 - 4 \rightarrow 2x = 22$

$x = \frac{22}{2} \rightarrow x = 11$

- Comprobamos e interpretamos la solución.

Caja de manzanas pesa 11 kg → Caja de naranjas pesa $11 + 4 = 15$ kg

Las dos cajas pesan $11 + 15 = 26$ kg → La solución es válida.

Scanned by CamScanner

5 Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación en la que el mayor exponente de su incógnita x es 2 se denomina ecuación de segundo grado.

Su forma general es del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números conocidos, y además $a \neq 0$.

EJEMPLOS

9. Identifica los coeficientes a, b y c de las siguientes ecuaciones.

a) $3x^2 - 6 = 0$

b) $4x^2 + 8x = 0$

c) $5x^2 - x + 2 = 0$

d) $3x^2 = 0$

a) $\begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = -6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \\ c = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a = 5 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

Las ecuaciones a), b) y d) reciben el nombre de **incompletas**, ya que alguno de sus coeficientes es 0.

La ecuación c) es **completa**, porque sus coeficientes son todos distintos de 0.

En una ecuación de segundo grado, el coeficiente a no puede ser 0 ya que así se convertiría en una ecuación de primer grado.

10. **Comprueba que los valores $x = 4$ y $x = -1$ son soluciones de la ecuación $x^2 - 3x - 4 = 0$.**

Sustituimos los valores de x en la ecuación.

$x^2 - 3x - 4 = 0 \xrightarrow{x=4} 4^2 - 3 \cdot 4 - 4 = 0 \rightarrow 16 - 12 - 4 = 0 \rightarrow 0 = 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0 \xrightarrow{x=-1} (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 4 = 0 \rightarrow 1 + 3 - 4 = 0 \rightarrow 0 = 0$

Los dos números hacen verdadera la igualdad, es decir, son soluciones.

Una ecuación de segundo grado puede tener dos soluciones, una o ninguna.

- $x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases} \rightarrow$ Tiene dos soluciones
- $2x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Solo tiene una solución.
- $x^2 = -1 \rightarrow$ No tiene ninguna solución.

Scanned by CamScanner

6 Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas

Son ecuaciones de segundo grado incompletas las ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$ y $ax^2 + bx = 0$.

EJEMPLOS

11. Resuelve la ecuación $5x^2 - 20 = 0$.

Para resolver ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$ seguimos estos pasos.

1. Despejamos x^2.

$$5x^2 - 20 = 0 \rightarrow 5x^2 = 20 \rightarrow x^2 = \frac{20}{5} = 4$$

2. Hallamos la raíz cuadrada en los dos miembros.

$$x^2 = 4 \rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

La raíz cuadrada de un número mayor que 0 tiene dos soluciones, una positiva y otra negativa. En este caso, el cuadrado de los dos números es 4.

En las ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$:

- Si $-\frac{c}{a} > 0$, hay dos soluciones, $x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$ y $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.
- Si $-\frac{c}{a} < 0$, no hay solución.

12. Resuelve la ecuación $x^2 + 5x = 0$.

Para resolver ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$ seguimos estos pasos.

1. Sacamos factor común a x.

$$x^2 + 5x = 0 \rightarrow x(x + 5) = 0$$

2. Igualamos a 0 los factores resultantes.

Cuando el producto de dos factores es 0, al menos uno de ellos debe ser 0.

Si $a \cdot b = 0$, *entonces* $a = 0$, *o bien* $b = 0$.

Por tanto, en nuestra ecuación tenemos:

$$x(x + 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 5 = 0 \rightarrow x = -5 \end{cases}$$

En las ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$ siempre hay dos soluciones:

$$x_1 = 0 \text{ y } x_2 = -\frac{b}{a}$$

Scanned by CamScanner

7 Resolución de ecuaciones de segundo grado completas

Llamamos ecuaciones de segundo grado completas a las ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son distintos de 0. Para calcular su solución se aplica la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EJEMPLOS

13. Resuelve la ecuación $x^2 - 3x - 10 = 0$.

Como es una ecuación de segundo grado completa en la que $a = 1$, $b = -3$ y $c = -10$, aplicamos la fórmula general.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3+7}{2} = 5 \\ x_2 = \dfrac{3-7}{2} = -2 \end{cases}$$

El signo $\pm$ indica que podemos obtener dos soluciones de la ecuación, una sumando y la otra restando. Las soluciones son $x_1 = 5$ y $x_2 = -2$.

14. Resuelve la ecuación $x^2 + 1 = -2x$.

Para resolver la ecuación la escribimos en la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Para ello pasamos el $-2x$ del segundo miembro al primero.

$$x^2 + 1 = -2x \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow a = 1,\ b = 2 \text{ y } c = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} =$$

$$= \frac{-2 \pm 0}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Solo obtenemos una solución, $x = -1$.

15. Resuelve la ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$.

$a = 1$, $b = 2$ y $c = 2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

La raíz cuadrada de un número negativo no existe, luego la ecuación no tiene solución.

ACTIVIDADES

15 Resuelve, aplicando la fórmula general.

a) $x^2 - 4x - 12 = 0$

b) $2x^2 + 7x + 3 = 0$

c) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

d) $x^2 + 3x + 4 = 0$

16 Resuelve estas ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 - 2 = x$

b) $x^2 + 2x = 3$

c) $x^2 = -4x - 4$

d) $x + 7 = -x^2$

Scanned by CamScanner

8 Resolver problemas mediante ecuaciones de segundo grado

La solución de algunos problemas se puede calcular expresando su enunciado mediante una ecuación de segundo grado, y resolviéndola.

EJEMPLO

16. La suma del doble de un número más su cuadrado es 8. ¿De qué número se trata?

- Comprendemos el enunciado e identificamos la incógnita.

Lo que sabemos...	Lo que no sabemos...
– El doble de un número más su cuadrado suman 8.	– El número.

El número → x (incógnita)

- Planteamos la ecuación.

Un número → x

El cuadrado de ese número → x^2

El doble de ese número más su cuadrado → $2x + x^2$

El doble de ese número más su cuadrado es 8 → $2x + x^2 = 8$

- Resolvemos la ecuación.

Escribimos la ecuación como $ax^2 + bx + c = 0$ y la resolvemos.

$$2x + x^2 = 8 \rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \rightarrow a = 1,\ b = 2 \text{ y } c = -8$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} =$$

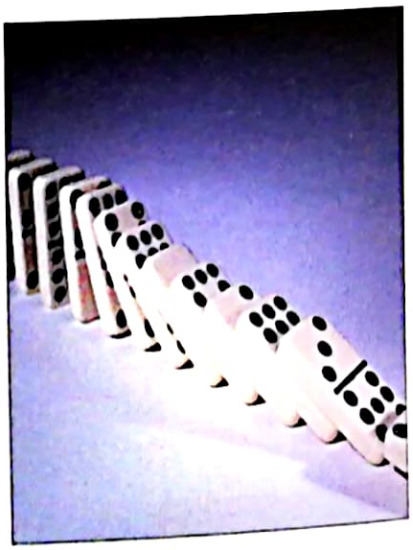
$$= \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2 + 6}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-2 - 6}{2} = -4 \end{cases}$$

Existen dos soluciones, $x_1 = 2$ y $x_2 = 4$.

- Comprobamos e interpretamos la solución.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x = 2 \longrightarrow 2 \cdot 2 + 2^2 = 4 + 4 = 8 \\ \text{Si } x = -4 \rightarrow 2 \cdot (-4) + (-4)^2 = -8 + 16 = 8 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Las dos soluciones son válidas.}$$

Hay dos números que cumplen el enunciado, el 2 y el -4.



Scanned by CamScanner

9 Sistemas de ecuaciones

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas está formado por dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, x e y, de las que se busca una solución común.

Una solución del sistema es cualquier par de números que cumplen las dos ecuaciones a la vez.

EJEMPLOS

17. Indica cuáles de los pares de ecuaciones que aparecen a continuación forman un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

a) $\left.\begin{array}{r} 3x + y = 6 \\ x - 2y = 3 \end{array}\right\} \rightarrow$ Dos ecuaciones de grado 1 con dos incógnitas. Es un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

b) $\left.\begin{array}{r} 3x^2 + y = 6 \\ x - 2y = 3 \end{array}\right\} \rightarrow$ La primera ecuación tiene grado 2. No es un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

c) $\left.\begin{array}{r} 3x + y = 6 \\ 7x = 3 \end{array}\right\} \rightarrow$ Aunque en la segunda ecuación no aparece y, se puede considerar multiplicada por 0. Es un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

18. Di si los siguientes valores son solución del sistema $\left.\begin{array}{r} 3x + y = 5 \\ x - 2y = -3 \end{array}\right\}$.

a) $x = 1, y = 2$

$$\left.\begin{array}{r} 3x + y = 5 \\ x - 2y = -3 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=1,\, y=2} \left.\begin{array}{l} 3 \cdot 1 + 2 = 5 \\ 1 - 2 \cdot 2 = -3 \end{array}\right\} \rightarrow$$ Es solución porque cumple las dos ecuaciones.

b) $x = 0, y = 5$

$$\left.\begin{array}{r} 3x + y = 5 \\ x - 2y = -3 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=0,\, y=5} \left.\begin{array}{l} 3 \cdot 0 + 5 = 5 \\ 0 - 2 \cdot 5 \neq -3 \end{array}\right\} \rightarrow$$ No es solución porque no cumple la segunda ecuación.

c) $x = 3, y = 3$

$$\left.\begin{array}{r} 3x + y = 5 \\ x - 2y = -3 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=3,\, y=3} \left.\begin{array}{l} 3 \cdot 3 + 3 \neq 5 \\ 3 - 2 \cdot 3 = -3 \end{array}\right\} \rightarrow$$ No es solución porque no cumple la primera ecuación.

Scanned by CamScanner

10 Resolución de un sistema de ecuaciones

Resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas es hallar los valores de ambas incógnitas que cumplen al mismo tiempo las dos ecuaciones.

EJEMPLO

19. Resuelve este sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=7 \\ 3x-2y=6 \end{array}\right\}$$

Nos fijamos en la primera ecuación. Podemos encontrar varias parejas de números cuya suma es 7 (soluciones de la primera ecuación):

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	7	6	5	4	3	2	1	0
$x+y$	7	7	7	7	7	7	7	7

También hay parejas de números que cumplen la segunda ecuación:

x	2	3	4	5	6	8	10
y	0	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{9}{2}$	6	9	12
$3x-2y$	6	6	6	6	6	6	6

Sin embargo, solo hay una pareja de números que se repite en las dos tablas. Esto quiere decir que cumple a la vez las dos ecuaciones.
Por tanto, los valores $x = 4, y = 3$ son la **solución del sistema.**

Para **comprobar** que la solución obtenida es la solución del sistema, sustituimos las incógnitas por su valor y comprobamos que se cumplen las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=7 \\ 3x-2y=6 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=4,\ y=3} \left.\begin{array}{r} 4+3=7 \\ 3\cdot 4-2\cdot 3=6 \end{array}\right\}$$

Es solución porque cumple las dos ecuaciones.

Scanned by CamScanner

EJEMPLO

20. Resuelve el sistema $\left.\begin{matrix} x - y = 3 \\ x + 2y = 6 \end{matrix}\right\}$.

a) Por el método de sustitución.

Despejamos una de las incógnitas de una ecuación y sustituimos el resultado en la otra ecuación.

$$\left.\begin{matrix} x - y = 3 \\ x + 2y = 6 \end{matrix}\right\} \rightarrow x = 3 + y$$

$$\xrightarrow{x = 3 + y} 3 + y + 2y = 6 \rightarrow 3 + 3y = 6$$

$$\rightarrow 3y = 6 - 3 \rightarrow 3y = 3 \rightarrow y = 1$$

Una vez hallado el valor de y, lo sustituimos en la otra ecuación.

$$x = 3 + y \xrightarrow{y = 1} x = 3 + 1 \rightarrow x = 4$$

La solución del sistema es $x = 4, y = 1$.

b) Por el método de igualación.

Despejamos la misma incógnita de las dos ecuaciones e igualamos las expresiones obtenidas.

$$\left.\begin{matrix} x - y = 3 \rightarrow x = 3 + y \\ x + 2y = 6 \rightarrow x = 6 - 2y \end{matrix}\right\} \rightarrow 3 + y = 6 - 2y$$

$$\rightarrow y + 2y = 6 - 3 \rightarrow y = 1$$

Sustituimos en cualquiera de las expresiones que obtuvimos para x.

$$x = 6 - 2y \xrightarrow{y = 1} x = 6 - 2 \cdot 1 = 6 - 2 \rightarrow x = 4$$

La solución del sistema es $x = 4, y = 1$.

c) Por el método de reducción.

Multiplicamos una o las dos ecuaciones por un número de forma que al sumar las ecuaciones eliminemos una de las incógnitas.

En este caso, multiplicando por 2 la primera ecuación y, sumando las ecuaciones, eliminamos y:

$$\left.\begin{matrix} x - y = 3 \xrightarrow{\cdot 2} 2x - 2y = 6 \\ x + 2y = 6 \quad\quad + \; x + 2y = 6 \end{matrix}\right\}$$

$$3x \quad\quad = 12 \rightarrow x = \frac{12}{3} = 4$$

Sustituyendo en $x + 2y = 6 \xrightarrow{x = 4} 4 + 2y = 6 \rightarrow 2y = 2 \rightarrow y = 1$

La solución del sistema es $x = 4, y = 1$.

Scanned by CamScanner

12 Resolución de problemas con sistemas

Como hacemos con las ecuaciones, algunos problemas pueden resolverse usando sistemas siguiendo pasos similares:

- **Comprender** el enunciado e **identificar** las incógnitas.
- **Plantear** el sistema.
- **Resolver** el sistema.
- **Comprobar** e **interpretar** la solución.

EJEMPLO

21. Fran pescó 10 peces entre carpas y lucios. El número de lucios es el doble que el de carpas más uno. ¿Cuántas carpas y lucios cogió?

- Comprendemos el enunciado e identificamos las incógnitas.

Lo que sabemos...	Lo que no sabemos...
– Entre lucios y carpas hay 10 peces. – El número de lucios es el doble que el de carpas más 1.	– Número de lucios. – Número de carpas.

Número de lucios → x (incógnita) Número de carpas → y (incógnita)

- Planteamos el sistema.

Entre lucios y carpas hay 10 peces $\longrightarrow x + y = 10$

El número de lucios es el doble que el de carpas más 1 $\rightarrow x = 2y + 1$

- Resolvemos el sistema.

Puesto que en la segunda ecuación está despejada la x, resolvemos el sistema por el método de sustitución.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 10 \\ x = 2y + 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 2y+1} 2y + 1 + y = 10 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2y + y = 10 - 1 \rightarrow 3y = 9 \rightarrow y = 3$$

Calculamos el valor de x utilizando la segunda ecuación del sistema.

$$x = 2y + 1 \xrightarrow{y=3} x = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

La solución del sistema es $x = 7, y = 3$.

- Comprobamos e interpretamos la solución.

Si ha pescado 7 lucios y 3 carpas:

Entre lucios y carpas hay 10 peces → $7 + 3 = 10$

El número de lucios es el doble que el de carpas más 1 → $7 = 2 \cdot 3 + 1$

Luego la solución es válida.

Scanned by CamScanner

Ecuaciones de primer grado

30 ●●● Identifica las partes que forman estas ecuaciones.

a) $5x - 9 = 4 + 3x$

b) $10 + 6x - x = 12 - x$

c) $4x + 8 = 9 + 3x$

d) $-6x - 9 = 15$

31 ●●● Escribe las siguientes ecuaciones en la forma $ax + b = 0$.

a) $2x + 7 = 3x + 5$

b) $-4 + 3x = 5x$

c) $5 - 4x = 1$

d) $6 = -2x$

32 ●●● Encuentra la solución de estas ecuaciones probando diferentes valores.

a) $4 + 2x = 8$

b) $3x - 1 = 11$

c) $5x + 3 = 28$

d) $13 - 2x = 5$

33 ●●● Cada una de las parejas de ecuaciones que se dan a continuación son equivalentes. Encuentra los pasos que llevan de la primera a la segunda.

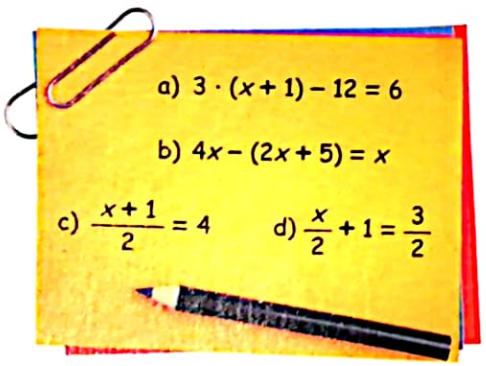
a) $-4 + 5x = 11 \rightarrow 5x = 15$

b) $4x - \frac{2}{3} = 1 \rightarrow 12x = 5$

c) $\frac{x-5}{6} = \frac{x}{5} \rightarrow -x = 25$

d) $4 \cdot (2x - 8) = 0 \rightarrow 2x = 8$

34 ●●● Encuentra una ecuación equivalente a cada una de las siguientes, indicando el método utilizado para obtenerla.



35 ●●● Escribe la ecuación equivalente sin denominadores.

a) $\frac{x+5}{3} - 6 = 0$

b) $\frac{3x}{4} + \frac{1+x}{6} = x$

36 ●●● ¿Son equivalentes estas tres ecuaciones?

$\frac{x}{2} - 3 = x$ $\quad \frac{x-6}{2} = \frac{6x}{4}$ $\quad x - 6 = 2x$

37 ●●● Razona cuál de las siguientes ecuaciones es equivalente a $2x - 10 = 4$.

a) $2 \cdot (x - 10) = -x + 1$

b) $2x - 10 = x$

c) $3x - 10 = 11$

38 ●●● Realiza el producto y utiliza los métodos de la suma y del producto para resolver las siguientes ecuaciones.

a) $5 \cdot (x - 3) = 20$

b) $3 \cdot (4 - x) = -3$

c) $7 \cdot (x - 1) = 56$

d) $4 \cdot (6 - x) = -8$

e) $6 \cdot (9 - x) = 30$

f) $10 \cdot (8 + x) = 50$

g) $2 \cdot (x + 7) = 24$

39 ●●● Resuelve estas ecuaciones.

a) $4 - (5 - x) = 2x$

b) $7 - (4x + 2) = 5x$

c) $9 - (3x - 1) = 7x$

d) $10 - (6 - 2x) = x$

e) $13 - (7 - x) = 3x$

f) $8 - (5 - x) = 2x$

40 ●●● Encuentra la solución de las ecuaciones.

a) $7x - 2 \cdot (x + 1) = 0$

b) $3x + 4 \cdot (5 - 2x) = -2$

c) $5x - 3 \cdot (9 - x) = 4$

d) $6x + 5 \cdot (1 - 3x) = 12$

e) $x - 3 \cdot (x - 2) = 10$

f) $2x + 7 \cdot (x + 4) = 19$

41 ●●● Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{x}{2} - 3 = 5 - x$

b) $\frac{x-3}{2} = 5 - \frac{x}{3}$

c) $\frac{x}{2} - \frac{5}{3} = x + 3$

d) $\frac{x}{2} + 3 = 5x - 3$

e) $\frac{x}{2} - x = \frac{x}{3} + 5$

f) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5 - x$

Scanned by CamScanner

42 ¿Cuál es la solución de estas ecuaciones?

a) $\frac{x+1}{3} - x = 2$

b) $\frac{x+3}{2} - 3x = x$

c) $\frac{x+1}{2} + x = \frac{x}{3}$

d) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = x + 2$

e) $\frac{x}{3} + x = \frac{x}{2} + 2$

f) $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} = 2$

43 Encuentra la solución para cada ecuación.

a) $\frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{4} = 5$

b) $\frac{2x+3}{4} + \frac{x}{2} = \frac{x-1}{3}$

c) $\frac{x-2}{5} + \frac{x+5}{2} = 5x$

d) $\frac{x-3}{2} + \frac{x-1}{8} = x$

e) $\frac{2x-3}{9} + \frac{2x-1}{3} = \frac{x}{6}$

f) $\frac{x-5}{6} + \frac{x+3}{8} = 2 - x$

Ecuaciones de segundo grado

44 Determina el número de soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 - 1 = 0$

b) $x^2 + 2x = 0$

c) $x^2 - 4x + 4 = 0$

d) $x^2 + 8x + 16 = 0$

e) $x^2 - x - 2 = 0$

f) $x^2 = 7x - 12$

g) $2x^2 - 4 + 3x = x^2 + 2 + 2x$

45 Resuelve estas ecuaciones.

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$

b) $x^2 - 6x - 27 = 0$

c) $4x^2 - 24x + 36 = 0$

d) $x^2 + 6x = -9$

e) $x^2 + 9 = 10x$

f) $2x^2 + 10x - 48 = 0$

g) $x^2 - x = 20$

h) $3x^2 - 15x + 18 = 0$

46 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $7x^2 = 63$

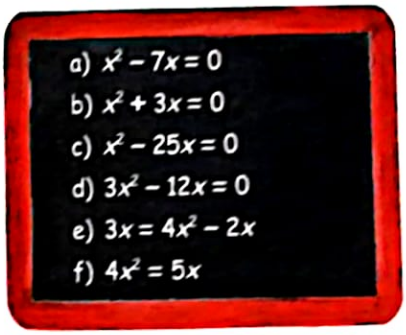
b) $x^2 - 24 = 120$

c) $x^2 - 25 = 0$

d) $x^2 - 10000 = 0$

e) $x^2 - 3 = 22$

47 Resuelve estas ecuaciones.



48 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $(x + 1) \cdot (x - 3) + 3 = 0$

b) $(x + 9) \cdot (x - 9) = 3 \cdot (x - 27)$

c) $x \cdot (3x - 2) = 65$

d) $4x - (x^2 - 4) = 2x - 4$

e) $(2x + 3) \cdot (2x - 3) = 135$

Sistemas de ecuaciones

49 Calcula el valor de y cuando $x = 3$ de forma que la pareja sea solución de las siguientes ecuaciones.

a) $2x + y = 7$

b) $3x - y = 4$

c) $x + 4y = 19$

d) $2 \cdot (x + 2y) = 24$

50 Calcula el valor de x cuando $y = 5$ de forma que la pareja sea solución de las siguientes ecuaciones.

a) $x + 3y = 17$

b) $9 - x = y$

c) $4x - 6 = 1 + y$

d) $y - (x + 5) = 8$

51 Encuentra para cada ecuación tres parejas de valores de x e y que la verifiquen.

a) $4x + y = 9$

b) $x - y = 5$

c) $2x + 3y = 18$

d) $x + 4y = 25$

Scanned by CamScanner

52 Escribe las siguientes ecuaciones en la forma $ax + by = c$ y encuentra dos soluciones para cada una.

a) $3x - y + 2 = x - 4y + 1$

b) $-5 \cdot (x - y) + 3y = 2x$

c) $2y - (6x + 7) = -2$

53 Averigua de cuál de estas ecuaciones es solución el par $(1, -2)$.

a) $4x + 2y = 1$

b) $-4x + 2y = -8$

c) $4x - 2y = 0$

d) $4x + 2y = 0$

54 De todas las parejas que son solución de la ecuación $4x + y = 9$, ¿cuál es también solución de la ecuación $x + y = 3$?

55 ¿Hay alguna pareja de valores de x e y que cumplan la ecuación $3x - y = 1$, y la ecuación $2x + 3y = 19$? ¿Qué nombre recibe esa pareja de valores?

56 Indica cuáles de los siguientes sistemas tienen como solución el par $(-3, 4)$.

a) $\left.\begin{array}{r} 4x + y = -8 \\ -x - 2y = 5 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = -11 \\ -x + y = 7 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = -10 \\ x + 3y = 9 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = -6 \end{array}\right\}$

57 Resuelve estos sistemas por el método de sustitución.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 3 \\ 3x - y = -8 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -2x + 5y = 9 \\ x - y = -3 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 5x - 4y = 2 \\ 3x + 2y = -12 \end{array}\right\}$

58 Resuelve estos sistemas por el método de igualación.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = -10 \\ x + 3y = 9 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x - 4y = 10 \\ -x + y = -3 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 5x - 2y = -1 \\ -5x + 6y = 13 \end{array}\right\}$

59 Resuelve estos sistemas por el método de reducción

a) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = -11 \\ -x + y = 7 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x - 4y = 6 \\ x + y = 1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x - 7y = -19 \\ -5x + 6y = 13 \end{array}\right\}$

60 Resuelve por el método que creas más adecuado.

a) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{y+4}{3} = -1 \\ \dfrac{x+4}{5} = \dfrac{-y}{8} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2 \cdot (x + 3) - (x - y) = 9 \\ -3 \cdot (x + y) + 4y = 11 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 4 \cdot (x + 2y) - x = -y \\ -3x = 2y - 4 - x \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{2x-4}{5} - \dfrac{y+3}{2} = 3 \\ \dfrac{x+y}{2} = 1 \end{array}\right\}$

Problemas de ecuaciones y sistemas

61 Laura y Javier tienen entre los dos 54 libros. Calcula los libros que tiene cada uno sabiendo que Javier tiene el doble que Laura.

62 Andrea tiene una colección de películas que sobrepasa en 42 al doble de las que tiene Jaime. ¿Cuántas películas tiene Jaime?

63 Un padre reparte 6 500 € entre sus dos hijos de forma que el menor recibe los $\frac{4}{9}$ de lo que le corresponde al mayor. ¿Cuánto dinero recibe cada uno?

Scanned by CamScanner

64 Escribe la ecuación que se corresponde con los enunciados y obtén la solución.

a) El triple de un número más cinco resulta veintiséis.

b) El doble de un número menos tres resulta nueve.

c) La suma de un número más su doble más su triple resulta cincuenta.

d) Un número menos su mitad menos su tercera parte resulta seis.

65 Un número y su anterior suman 75. ¿De qué números se trata?

66 Halla dos números consecutivos sabiendo que la suma de la cuarta parte del menor más dos es igual a la tercera parte del mayor.

67 Si se suma 25 al cuadrado de cierto número, resulta el cuadrado de 13. ¿Cuál es el número?

68 Divide el número 20 en dos partes de tal manera que la suma de sus cuadrados sea 202.

69 El área de un cuadrado más su perímetro es 45. Halla cuál es el lado del cuadrado.

70 Expresa los siguientes enunciados mediante ecuaciones lineales con dos incógnitas y escribe dos soluciones de cada una.

a) La diferencia de las edades de Juan y Jesús es 12 años.

b) Las ruedas de los coches y motos del garaje son 56.

c) Tengo 1,35 € en monedas de 0,20 € y 0,05 €.

d) 3 kg de manzanas y 2 de naranjas cuestan 11 €.

71 Tres pantalones y una camiseta cuestan 123 €, y un pantalón y tres camisetas, 105 €. Calcula cuánto cuesta cada prenda.

72 Jesús trabaja por turnos de mañana o de noche en un almacén. Si trabaja dos semanas de mañana y dos de noche, cobra al mes 860 €. Si trabaja tres semanas de mañana y una de noche, gana 820 €. ¿Cuánto cobra por cada semana de mañana y cuánto por cada una de noche?

73 Expresa los siguientes enunciados mediante ecuaciones lineales con dos incógnitas indicando para cada una dos soluciones.

a) La suma de dos números es 35.

b) El cuádruple de un número menos el doble de otro número es 26.

c) El triple de un número de dos cifras más el doble de las decenas es 102.

d) Al dividir un número entre 15 se obtiene 12 de resto.

74 Cinco botellas de agua y dos de vino cuestan 6,95 €. Tres botellas de agua y cuatro de vino cuestan 11,45 €. Calcula el precio de cada tipo de botella.

75 Se sabe que en una granja en la que se crían vacas y gallinas hay el triple de aquellas que de estas. ¿Cuántos animales hay de cada tipo si en total se cuentan 6 300 patas?

76 Entre las gallinas y los cerdos de una granja suman 80 cabezas y 220 patas. Calcula cuántas gallinas y cerdos hay en la granja.

77 En un garaje hay siete coches más que motos. ¿Cuántos hay de cada tipo si entre coches y motos suman 31?

78 En la campaña navideña, Alberto ha vendido cinco veces más triciclos que bicicletas. Si entre todos tenían 68 ruedas, ¿cuántos vendió de cada tipo?

79 El kilo de patatas cuesta la cuarta parte que el kilo de manzanas. Si por 3 kg de manzanas y 8 de patatas Isabel ha pagado 10 €, ¿cuánto cuesta el kilo de patatas?

80 En el monedero de Carla hay 13 monedas y 14 € en total. Si las monedas son de 2 € y 0,50 €, ¿cuántas hay de cada tipo?

81 Las edades de Pedro y Luis suman 34 años. Dentro de 16 años Pedro tendrá el doble de edad que Luis. ¿Cuántos años tienen ahora?

82 La edad de Sara es el doble que la de Elena. ¿Cuántos años deben pasar para que la edad de Elena sea cuatro quintos de la de Sara?

83 Expresa 47 como suma de dos números distintos tales que el primero es una unidad menor que el triple del segundo.

Scanned by CamScanner

SABER HACER

Entender una nómina

La primera nómina que ha cobrado Jorge en su nuevo trabajo le ha resultado confusa. En el departamento de Recursos Humanos le aclaran los siguientes datos.

EMPRESA ELÉCTRICAS PERALADA, S.A.
Domicilio: C/ Fernando Lázaro Carreter, s/n
C.I.F.: R46782965
Código de la cuenta de cotización a la Seguridad Social: 45/5792031-01

TRABAJADOR Jorge Graciano Martorel
N.I.F.: 03828135 S — Número Libro de Matrícula: 831
Núm. afiliación a la Seguridad Social: 45/10225893-96
Categoría o grupo profesional
Grupo de cotización: 5 — Fecha antigüedad: 1 ENE 03

Período de liquidación: Del 1 de ENERO al 31 de ENERO de 2005 — Total Días: 30

I. DEVENGOS		TOTALES
1. Percepciones salariales		
Salario base y Plus convenio	1 000 €	
Turnos mañana y noche	400 €	
Antigüedad	0 €	
A. TOTAL DEVENGADO		1.400 €
II. DEDUCCIONES		
2. Cotizaciones		
Seguridad Social y IRPF	500 €	
B. TOTAL A DEDUCIR		500 €
LÍQUIDO TOTAL A PERCIBIR (A-B)		900 €

- El salario base supone el doble del plus del convenio más 100 €.
- Este mes ha trabajado tres semanas en turno de mañana y una de noche. El salario de cada semana de noche es el doble que el de la mañana menos 50 €.
- Las cotizaciones son la suma de las aportaciones a la Seguridad Social y al IRPF. Para obtenerlas ha de tener en cuenta que la aportación a la Seguridad Social es el triple del IRPF más 20 €.

Considerando los datos anteriores, contesta a las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es el salario base de Jorge? ¿Y el plus del convenio?

b) ¿Cuánto cobra por cada semana que trabaja de mañana y de noche?

c) ¿Qué cantidades aporta a la Seguridad Social y al IRPF?

Scanned by CamScanner

Polígonos. Perímetro y área

5

? PUNTO DE PARTIDA

Los jóvenes de la foto nacieron en países cuyas banderas aparecen a su lado. Muchos de ellos viven ahora con nosotros, pero ¿conoces ni sus banderas? ¿Puedes describirlas indicando qué polígonos o figuras planas aparecen en ellas?

Scanned by CamScanner

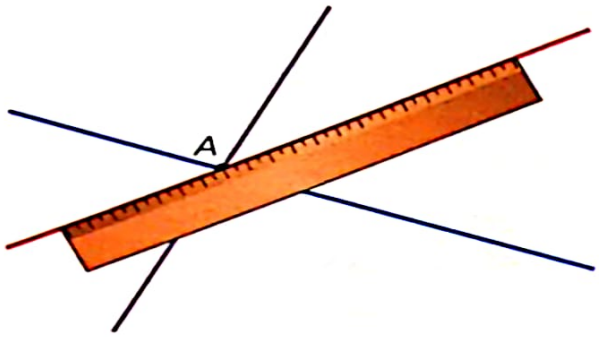
1 Rectas, semirrectas y segmentos

- Una **recta** es una línea continua formada por infinitos puntos que no tiene ni principio ni final.
- Una **semirrecta** es una línea recta que tiene principio pero no tiene final.
- Un **segmento** es una porción de una línea recta delimitada por dos puntos que llamamos **extremos**.

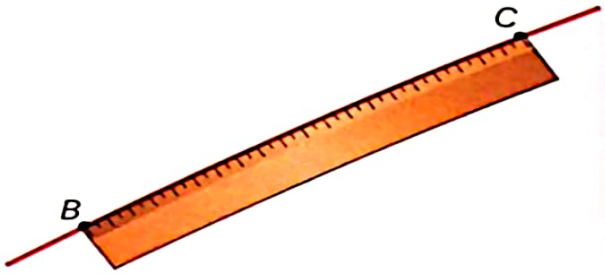
EJEMPLOS

1. ¿Cuántas rectas pueden pasar por un punto? ¿Y por dos puntos?

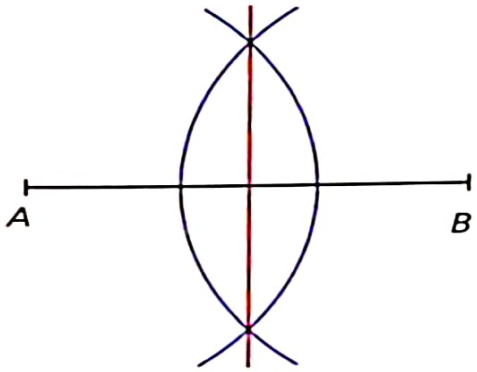
   - Por un punto pasan infinitas líneas rectas.



   - Por dos puntos pasa una única línea recta.



2. Dibuja la recta que pasa por el punto medio del segmento *AB* y cuyos puntos están a igual distancia de sus extremos.



La recta que pasa por el punto medio de un segmento y cuyos puntos están a igual distancia de sus extremos se llama **mediatriz del segmento**.

Para dibujarla abrimos el compás más que la mitad del segmento y dibujamos dos arcos con esa abertura pinchando en cada extremo, *A* y *B*, del segmento.

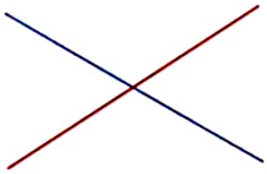
La mediatriz se obtiene uniendo los dos puntos donde se cortan esos arcos.

Scanned by CamScanner

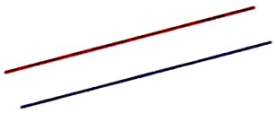
2 Posiciones relativas de dos rectas

Dos rectas pueden ser:

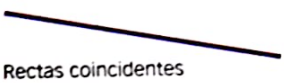
- **Secantes:** cuando se cortan en un punto.
- **Paralelas:** si no tienen ningún punto en común.
- **Coincidentes:** cuando todos sus puntos son comunes.
- **Perpendiculares:** cuando al cortarse dividen al plano en cuatro partes iguales.



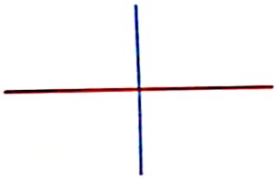
Rectas secantes



Rectas paralelas



Rectas coincidentes

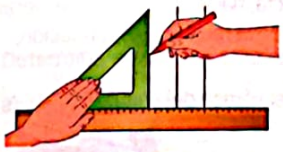


Rectas perpendiculares

EJEMPLOS

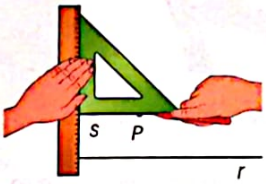
3. Traza rectas paralelas y perpendiculares utilizando la escuadra y la regla.

Para trazar rectas paralelas deslizamos el borde de la escuadra sobre una regla.



Para trazar rectas perpendiculares utilizamos los bordes perpendiculares de la escuadra.

4. Dibuja una recta paralela a la recta *r* y que pase por el punto *P*.

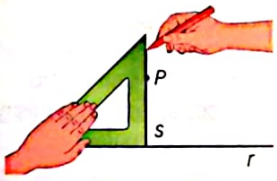


Apoyamos sobre la recta *r* uno de los bordes perpendiculares de la escuadra. Después, colocamos la regla pegada al otro borde.

Deslizamos la escuadra sobre la regla, hasta que el borde coincida con el punto *P*.

La recta *s* es paralela a la recta *r* y pasa por *P*.

5. Traza una recta perpendicular a la recta *r* y que pase por el punto *P*.



Sobre la recta *r* apoyamos uno de los bordes perpendiculares de la escuadra y lo deslizamos sobre la recta hasta que el otro borde coincida con el punto *P*.

La recta *s* es perpendicular a la recta *r* y pasa por *P*.

ACTIVIDADES

4 Estudia la posición relativa de las rectas que se determinan en estos casos.

a) Las vías del tren.

b) El largo y el ancho de una ventana.

c) Los radios de la rueda de una bicicleta.

d) Las huellas de un trineo en la nieve.

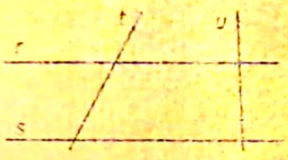
5 Clasifica las siguientes rectas.

a) *r* y *s*

b) *r* y *t*

c) *u* y *t*

d) *r* y *u*



Scanned by CamScanner

3 Ángulos. Clasificación de ángulos

Un ángulo es la abertura formada por dos semirrectas que parten de un mismo punto y se miden en grados. A cada semirrecta se la llama lado, y al punto, vértice.

Según su medida, los ángulos se clasifican en:

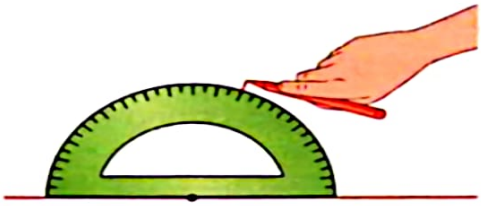
- **Ángulo agudo:** cuando mide menos de 90°.
- **Ángulo recto:** cuando mide 90°.
- **Ángulo obtuso:** cuando mide más de 90°.
- **Ángulo llano:** cuando mide 180°.

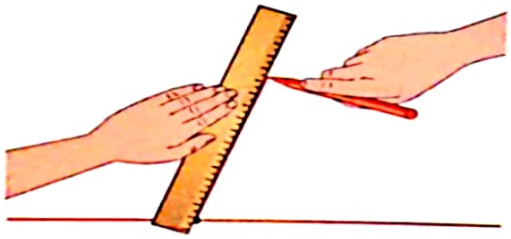
EJEMPLOS

6. Dibuja un ángulo de 70°.

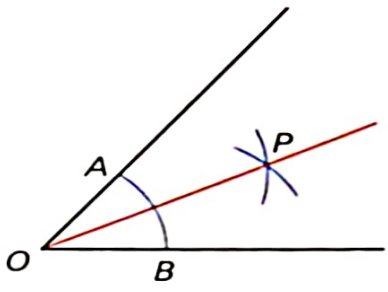
Colocamos el transportador sobre una recta, haciendo coincidir el vértice del transportador con un punto marcado en la recta y, a continuación, hacemos una marca en 70°.

Finalmente, utilizando una regla, unimos el vértice del ángulo con la marca efectuada.





7. Determina la recta que pasa por el vértice y divide este ángulo en dos partes iguales.



La recta que pasa por el vértice de un ángulo y lo divide en dos partes iguales se llama **bisectriz del ángulo.**

Para dibujarla se pincha el compás en el vértice, *O*, y se traza un arco que corte a los lados en dos puntos, *A* y *B*. Con centro en *A* y *B* se trazan otros dos arcos, con la misma abertura, que se cortarán en el punto *P*.

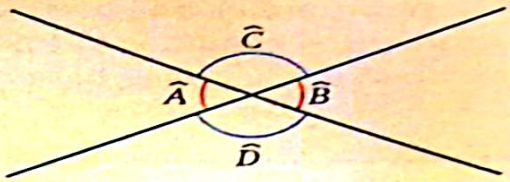
La recta que pasa por *P* y el vértice *O* será la bisectriz

Scanned by CamScanner

4 Posiciones relativas de ángulos

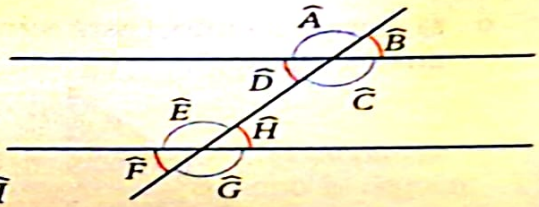
- **Ángulos opuestos por el vértice.** Son los cuatro ángulos que se forman al cortarse dos rectas. Son iguales dos a dos.

$\widehat{A} = \widehat{B} \qquad \widehat{C} = \widehat{D}$



- **Ángulos determinados por dos rectas paralelas y una secante.** Los ocho ángulos que se forman cumplen las siguientes igualdades:

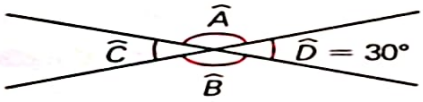
$\widehat{A} = \widehat{C} = \widehat{E} = \widehat{G} \quad \widehat{B} = \widehat{D} = \widehat{F} = \widehat{H}$



EJEMPLO

8. Determina el valor de estos ángulos.

a)



Los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{D}$ forman un ángulo llano:

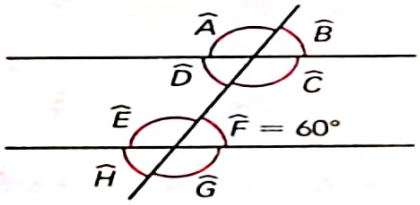
$\widehat{A} + \widehat{D} = 180° \rightarrow \widehat{A} = 180° - \widehat{D}$

$\widehat{A} = 180° - 30° = 150°$

Por ser ángulos opuestos por el vértice:

$\widehat{C} = \widehat{D} = 30° \qquad \widehat{B} = \widehat{A} = 150°$

b)



Los ángulos $\widehat{E}$ y $\widehat{F}$ forman un ángulo llano:

$\widehat{E} + \widehat{F} = 180° \rightarrow \widehat{E} = 180° - \widehat{F}$

$\widehat{E} = 180° - 60° = 120°$

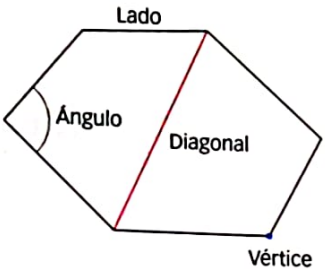
Por ser ángulos determinados por dos rectas paralelas y una secante:

$\widehat{A} = \widehat{C} = \widehat{G} = \widehat{E} = 120°$

$\widehat{B} = \widehat{D} = \widehat{H} = \widehat{F} = 60°$

Scanned by CamScanner

5 Polígonos. Tipos de polígonos



Un polígono es una parte del plano delimitada por tres o más segmentos llamados lados del polígono. El punto donde se unen dos lados se llama vértice.

EJEMPLOS

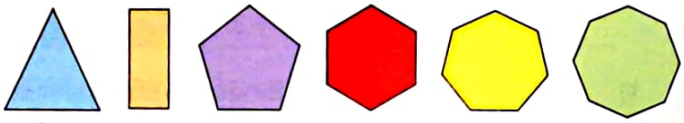
9. El campo de fútbol está formado por polígonos. ¿Cuáles son sus elementos?

Las líneas blancas alrededor del campo determinan el más grande de los polígonos que encontramos en él. Estas líneas son los **lados** del polígono y se unen en los puntos donde se sitúan los banderines, que son los **vértices**.

La abertura entre dos lados consecutivos, que viene marcada por un arco en el córner, se llama **ángulo**; en este caso miden 90° (es un ángulo recto).

La línea recta que une dos vértices no consecutivos se llama **diagonal**.

10. ¿Qué nombres reciben los siguientes polígonos?



Triángulo Cuadrilátero Pentágono Hexágono Heptágono Octógono

Existen diferentes tipos de polígonos según su número de lados.

Triángulo → 3 lados	Pentágono → 5 lados	Heptágono → 7 lados
Cuadrilátero → 4 lados	Hexágono → 6 lados	Octógono → 8 lados

ACTIVIDADES

11. ¿Son polígonos las siguientes figuras?
    a) Una herradura.
    b) La pantalla de una televisión.
    c) Un triángulo (instrumento musical).
    d) Las baldosas del suelo de la calle.

12. Localiza los polígonos del campo de fútbol del ejemplo e indica sus elementos.

13. Dibuja en tu cuaderno dos triángulos, dos cuadriláteros y dos hexágonos diferentes.

14. Dibuja en tu cuaderno un decágono (10 lados) y sitúa en él todos sus elementos.

15. ¿Qué polígonos hay en el dibujo?

Scanned by CamScanner

6 Clasificación de polígonos según sus lados y ángulos

Un polígono regular es el que tiene todos sus lados y todos sus ángulos iguales.

En caso contrario, si tiene algún lado o ángulo distinto, decimos que el polígono es irregular.

EJEMPLO

11. Determina si los polígonos que aparecen a continuación son regulares o irregulares.

a)

Es un polígono de cinco lados con todos los lados y ángulos iguales. El polígono es regular, se le llama **pentágono regular**.

b)

Es un polígono de cinco lados. Sus lados no miden lo mismo y sus ángulos son distintos. Es un polígono irregular, se llama **pentágono irregular**.

c)

En un rectángulo, aunque sus ángulos son iguales, todos son rectos, sus lados no miden lo mismo. Un rectángulo es un **polígono irregular**.

d)

Un cuadrado tiene sus cuatro ángulos y sus cuatro lados iguales. El cuadrado es un **polígono regular**.

e)

Este triángulo tiene sus tres ángulos y sus tres lados iguales. Es un triángulo regular; a este triángulo se le llama **triángulo equilátero**.

Scanned by CamScanner

7 La circunferencia y el círculo

Una circunferencia es una línea curva cerrada cuyos puntos están a la misma distancia de un punto que se denomina centro.

La parte del plano limitada por una circunferencia se llama círculo.

EJEMPLOS

12. Indica si las siguientes imágenes representan círculos o circunferencias.

a)

b)

a) La *pizza* no es una línea, es un círculo.

b) El aro es una circunferencia, una línea curva.

13. Describe los elementos de una circunferencia.

- Un **radio** es un segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de ella.
- El segmento que pasa por el centro y une dos puntos opuestos de la circunferencia recibe el nombre de **diámetro**. Un diámetro está formado por dos radios.
- Cualquier segmento que una dos puntos de la circunferencia sin pasar por el centro se llama **cuerda**.
- Si dibujamos dos radios, la parte de circunferencia comprendida entre ellos es un arco de circunferencia.

ACTIVIDADES

19 ¿Cuáles de los siguientes objetos se asocian a círculos y cuáles a circunferencias?

a) La esfera de un reloj.

b) El borde de un vaso.

c) Una noria.

d) Un *frisbee*.

e) Una señal de tráfico de obligación.

20 ¿Qué elementos de la circunferencia podemos encontrar en los siguientes casos?

a) Un transportador de ángulos.

b) Una *pizza* cortada en trozos.

c) Una loncha de mortadela cortada por la mitad.

d) Un arco de lanzar flechas.

e) Un trozo de queso cortado en cuña.

Scanned by CamScanner

8 Perímetro de un polígono. Longitud de una circunferencia

El perímetro de un polígono, P, es la suma de las longitudes de sus lados.

La longitud de una circunferencia, L, es la longitud de la línea curva que la define. Se calcula con la fórmula:

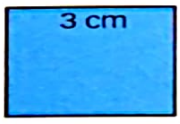
$$L = 2 \cdot \pi \cdot r$$

donde r es el radio de la circunferencia y π un número decimal con infinitos decimales, $\pi = 3{,}141592...$

EJEMPLOS

14. Determina el perímetro de estos polígonos.

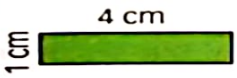
a)



Un cuadrado tiene sus cuatro lados iguales. Si llamamos l a la longitud de uno de sus lados, el perímetro del cuadrado será:

$P = l + l + l + l = 4 \cdot l \rightarrow P = 4 \cdot 3 = 12$ cm

b)



Un rectángulo tiene sus lados iguales dos a dos. Si llamamos a a su altura y b a su anchura:

$P = a + a + b + b = 2 \cdot a + 2 \cdot b \rightarrow$

$\rightarrow P = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 10$ cm

c)

En un heptágono regular sus siete lados son iguales. Si llamamos l a la longitud del lado:

$P = 7 \cdot l \rightarrow P = 7 \cdot 1{,}5 = 10{,}5$ cm

15. Determina la longitud de la circunferencia que delimita este círculo.

El radio de la circunferencia que delimita el círculo es $r = 1{,}2$ cm. Tomando $\pi = 3{,}14$:

$L = 2 \cdot \pi \cdot r \rightarrow l = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}2 = 7{,}54$ cm

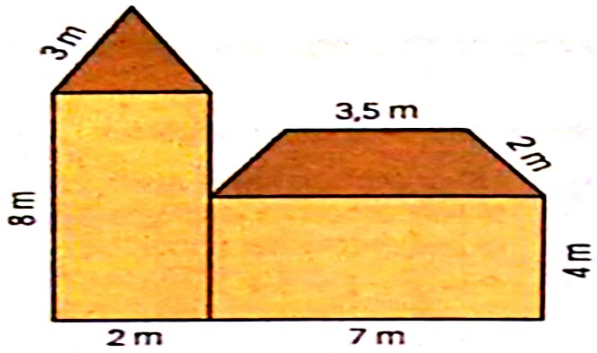
Scanned by CamScanner

9 Perímetros de figuras compuestas

Para calcular el perímetro de figuras compuestas, en todos sumamos las longitudes de [illegible]

EJEMPLO

16. Calcula el perímetro de la siguiente figura.



Tenemos que sumar las longitudes de los segmentos que delimitan la figura.

- En la torre, el tejado es triangular y los dos lados exteriores miden lo mismo. En la altura de la torre, su lado derecho solo habrá que contarlo hasta el punto de corte con la casa más baja. Como la altura de la casa es de 4 m, el lado derecho medirá $8 - 4 = 4$ m. Así, el perímetro de la torre será:

$$P_1 = 8 + 3 + 3 + 4 + 2 = 20 \text{ m}$$

- En cuanto a la casa, el tejado es un trapecio y sus lados inclinados son iguales. El perímetro será:

$$P_2 = 2 + 3{,}5 + 2 + 4 + 7 = 18{,}5 \text{ m}$$

La suma de ambos nos dará el perímetro de la figura completa:

$$P = P_1 + P_2 = 20 + 18{,}5 = 38{,}5 \text{ m}$$

Scanned by CamScanner

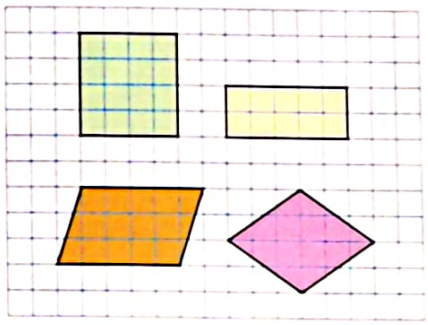
10 Área de un polígono

El área de un polígono es la cantidad de superficie que está en su interior.

Para hallar el área de una figura tenemos que elegir una unidad de medida y averiguar cuántas veces la superficie del polígono contiene a la unidad elegida.

EJEMPLO

17. Tomando como unidad de medida un cuadradito de esta cuadrícula, ¿cuál es el área de estas figuras?



- **El área de un cuadrado es igual a su lado elevado al cuadrado.** La longitud del lado del cuadrado es 4 veces la del lado de un cuadradito. Su área, A, es:

$$A_{Cuadrado} = l^2 = 4^2 = 16 \text{ cuadraditos}$$

- **El área de un rectángulo es el producto de su base y su altura.** Las longitudes de su anchura y su altura son 5 y 2, respectivamente.

$$A_{Rectángulo} = b \cdot h = 5 \cdot 2 = 10 \text{ cuadraditos}$$

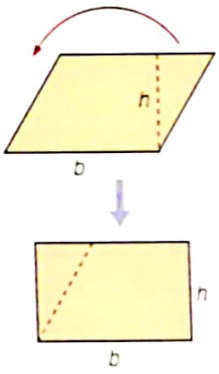
- **El área de un romboide es el producto de su base y su altura.** Su área es igual que la de un rectángulo de su misma anchura y altura.

$$A_{Romboide} = b \cdot h = 5 \cdot 3 = 15 \text{ cuadraditos}$$

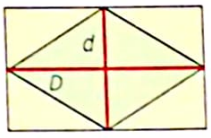
- **El área de un rombo es el producto de sus diagonales partido por dos.** Es la mitad del área de un rectángulo de anchura la diagonal mayor, D, y de altura la diagonal menor, d.

$$A_{Rombo} = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ cuadraditos}$$

Área de un romboide



Área de un rombo



ACTIVIDADES

26 En la final del torneo de Wimbledon empieza a llover, y tienen que proteger la hierba con una lona. Si los lados de la pista miden 23,79 m por 10,97 m, ¿qué área tendrá la lona que cubra la pista?

27 En su empresa, María se encarga de comprar el material de ferretería. Necesita una llave para unos tornillos de cabeza cuadrada de 50 mm de lado. ¿Qué área tendrá el hueco de la llave que encaje en los tornillos?

Scanned by CamScanner

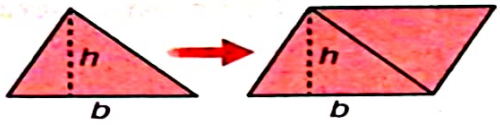
11 Área de figuras planas

Para hallar el área de cualquier figura plana es necesario unirlas o descomponerlas hasta obtener una figura cuya área ya conocemos.

EJEMPLO

18. Calcula el área de estas figuras.

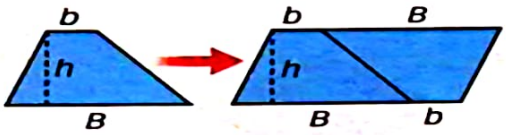
a) Un triángulo.



El área de un triángulo es la mitad del área de un romboide con la misma base e igual altura:

$$A_{\text{Triángulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

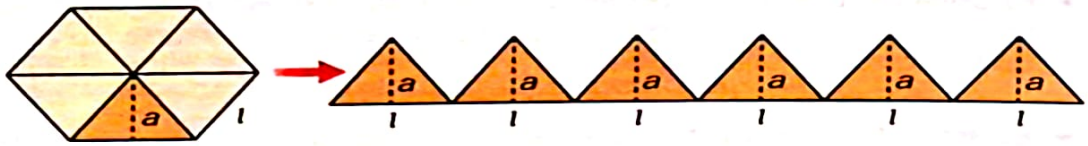
b) Un trapecio.



El área de un trapecio es la mitad del área de un romboide con la misma altura y cuya base es la suma de las bases del trapecio:

$$A_{\text{Trapecio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

c) Un polígono regular.



Un polígono regular se puede descomponer en tantos triángulos iguales como lados tenga. El **área de un polígono regular** es la suma de las áreas de esos triángulos de base el lado del polígono y altura su apotema:

$$A_{\text{Polígono regular}} = n \cdot \frac{l \cdot a}{2} = \frac{P \cdot a}{2}$$

$n \rightarrow$ Número de lados
$P \rightarrow$ Perímetro del polígono

d) Un círculo.

Un círculo se puede considerar como un polígono regular de muchos lados. El **área de un círculo** es el área de un polígono regular en el que el perímetro es la longitud de la circunferencia, y su apotema, el radio:

$$A_{\text{Círculo}} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{L \cdot r}{2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2$$

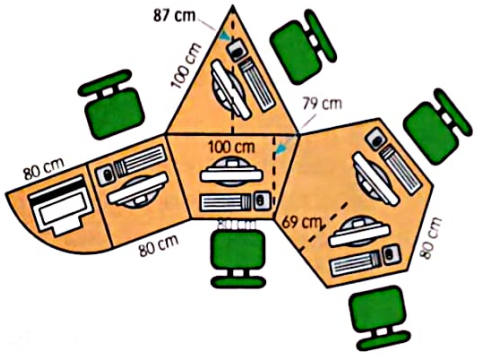
Scanned by CamScanner

12 Áreas de figuras compuestas

Para hallar el área de figuras compuestas descomponemos la figura en polígonos cuyas áreas son conocidas. Después, sumamos todas las áreas obtenidas.

EJEMPLO

19. Un carpintero tiene que fabricar una mesa formada por varios tableros que servirá para que 5 informáticos puedan trabajar sin molestarse. ¿Qué superficie de madera necesita?



- Triángulo: $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{100 \cdot 87}{2} = 4\,350\ cm^2$
- Cuadrado: $A = l^2 = 80^2 = 6\,400\ cm^2$
- Hexágono: $A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 80 \cdot 69}{2} = 16\,560\ cm^2$
- Trapecio: $A = \frac{B + b}{2} \cdot h = \frac{100 + 80}{2} \cdot 79 = 7\,110\ cm^2$
- La figura circular del extremo izquierdo de la mesa es la cuarta parte del círculo de radio 80 cm.

$$A = \frac{\pi \cdot r^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 80^2}{4} = 5\,024\ cm^2$$

El área de la mesa es la suma de todas las áreas calculadas.

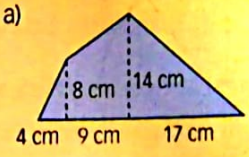
$$A_{total} = 4\,350 + 6\,400 + 16\,560 + 7\,110 + 5\,024 = 39\,444\ cm^2$$

Necesita casi 4 m^2 de madera.

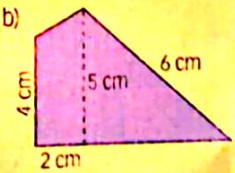
ACTIVIDADES

30 Calcula el área de estas figuras.

a)



b)



31 El criadero de flores de un vivero tiene forma de octógono regular con lado de 30 m y apotema de 36,6 m. En el centro hay una fuente circular de 2,5 m radio y unas estanterías para apilar los sacos de abono, que miden 40 m de largo por 2 m de ancho. ¿En qué superficie se pueden plantar flores?

Scanned by CamScanner

Rectas y ángulos

32 ●●● Di si estas afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Una recta no tiene extremos.

b) En una semirrecta podemos trazar su mediatriz.

c) Un segmento está formado por dos semirrectas.

d) Si en una recta marcamos dos puntos, obtenemos dos semirrectas y un segmento.

33 ●●● Dibuja un triángulo y traza las mediatrices de sus tres lados. ¿Qué observas?

34 ●●● Si en un ángulo llano trazas su bisectriz, ¿qué tipo de ángulos obtienes?

35 ●●● Si en un ángulo de 60° trazas su bisectriz, ¿cuánto mide cada uno de los ángulos que obtienes?

36 ●●● Dibuja en tu cuaderno.

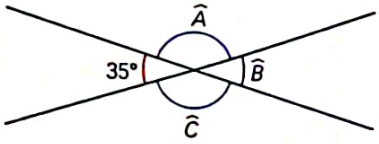
a) Un ángulo de 35°.

b) Un ángulo de 160°.

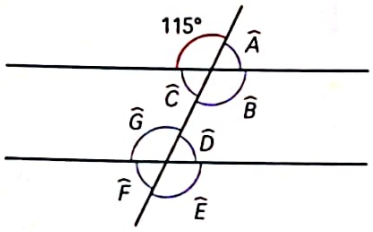
c) Un ángulo agudo mayor que 30°.

d) Un ángulo obtuso menor que 120°.

37 ●●● Calcula el valor de los ángulos desconocidos.



38 ●●● Calcula el valor de estos ángulos.



Polígonos, circunferencia y círculo

39 ●●● Indica el número de vértices y lados de estos polígonos.

a)

b)

c)

40 ●●● Dibuja un polígono de 5 lados y señala estos elementos: lados, ángulos, diagonales y vértices.

41 ●●● Indica el nombre de estos polígonos según su número de lados.

a)

c)

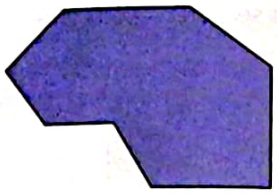
e)

b)

d)

f)

42 ●●● Dibuja la siguiente figura en tu cuaderno.



a) ¿Cuántos lados tiene?

b) Por su número de lados, ¿qué nombre recibe?

c) Dibuja sus diagonales. ¿Cuántas tiene?

d) Señala sus ángulos. ¿Cuántos tiene?

43 ●●● ¿Cuántas diagonales tiene un rectángulo? ¿Y un hexágono?

44 ●●● ¿Cuántos vértices más tiene un octógono que un heptágono? ¿Y diagonales?

45 ●●● ¿El número de vértices de un polígono es mayor, menor o igual al número de lados?

46 ●●● Dibuja varios pentágonos distintos. ¿Todos los pentágonos tienen el mismo número de diagonales?

47 ●●● Dibuja un polígono con las siguientes características.

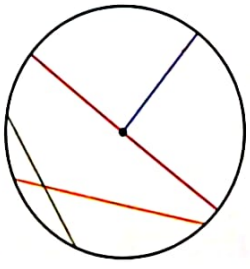
a) Tiene dos diagonales una doble de la otra.

b) Tiene siete vértices, tres de ellos situados en segmentos perpendiculares.

c) Tiene seis ángulos interiores, dos de ellos rectos.

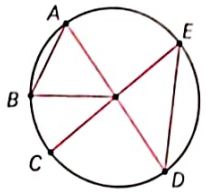
48 ●●● Dibuja un polígono de cinco lados regular y otro irregular.

49 ●●● Indica el nombre de los elementos destacados.



Scanned by CamScanner

50 Considera la figura e identifica los radios, diámetros y cuerdas que se observan en ella.



51 Dibuja una circunferencia de radio 4,5 cm y marca en ella dos diámetros, dos radios y dos cuerdas.

52 Dibuja una circunferencia con un compás. Después, traza una cuerda y señala, con diferentes colores, los dos arcos que determina.

53 Si el radio de una circunferencia mide 3 cm, responde razonadamente.

a) ¿Cuánto mide el diámetro?

b) ¿Entre qué valores se sitúan las medidas de las cuerdas?

54 ¿Cuáles de los siguientes objetos se asocian a circunferencias y cuáles a círculos?

a) Una moneda.

b) Una pulsera.

c) Un anillo.

d) Cada una de las superficies luminosas de un semáforo.

e) La base de un vaso.

55 Imagina un reloj cuyas agujas son de la misma longitud, dibuja el arco de circunferencia que se define entre las puntas de sus agujas en los siguientes momentos.

a) Las dos en punto.

b) La una y media.

c) Las cuatro menos veinte.

d) Las cinco menos cinco.

Perímetros y áreas

56 Halla el perímetro de los siguientes triángulos.

a) Un triángulo cuyos lados miden 3, 5 y 7 cm.

b) Un triángulo equilátero de lado 12 cm.

57 Calcula el perímetro de las siguientes figuras.

a) Un rectángulo de base 10 cm y de altura 6 cm.

b) Un cuadrado de lado 9 cm.

c) Un rombo cuyo lado mide 3,75 cm.

58 Halla el perímetro de las siguientes figuras regulares.

a) Un pentágono regular de 8,25 cm de lado.

b) Un heptágono regular de 9 cm de lado.

c) Un hexágono regular de 7,5 cm de lado.

59 Dibuja los siguientes polígonos sabiendo que su perímetro es 36 cm.

a) Un hexágono regular.

b) Un rectángulo cuya base es el doble de la altura.

c) Un cuadrado.

60 Halla el lado de cada uno de estos polígonos regulares.

a) Octógono regular de 32 cm de perímetro.

b) Pentágono regular de 75 cm de perímetro.

c) Heptágono regular de 56 cm de perímetro.

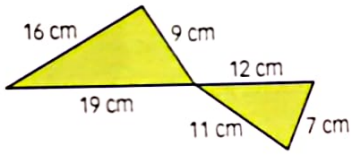
61 Calcula la longitud de la circunferencia:

a) Cuyo diámetro es 12 cm.

b) Cuyo radio es 4,6 cm.

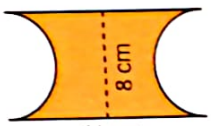
62 Calcula el radio de la circunferencia de la que se sabe que su longitud es 51,52 cm.

63 Halla el perímetro de la figura.

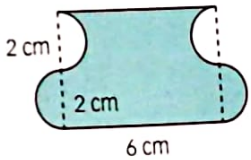


64 Halla el perímetro de las figuras.

a)

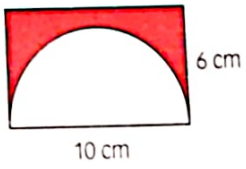


b)

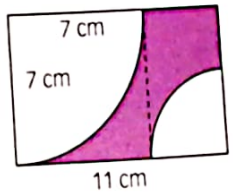


65 Determina el perímetro de las figuras coloreadas:

a)



b)



66 Calcula el área de los siguientes cuadrados.

a) Cuadrado cuyo lado mide 11 cm.

b) Cuadrado cuyo perímetro es 48 cm.

Scanned by CamScanner

ACTIVIDADES

67 ●●● Calcula el área de estos rectángulos.

a) Rectángulo de base 15 cm y altura la tercera parte de la base.

b) Rectángulo de base 12 cm y altura la mitad de la base.

c) Rectángulo de perímetro 56 cm y altura 8 cm.

d) Rectángulo de perímetro 44 cm y base 16 cm.

68 ●●● Halla el área de estos paralelogramos.

a) Rectángulo de 8 cm de base y altura 5,2 cm.

b) Rombo cuyas diagonales miden 20 y 14 cm.

c) Romboide de 7 cm de base y altura 4,3 cm.

69 ●●● Calcula el área de los siguientes rombos.

a) Rombo con diagonal menor 4 cm y diagonal mayor triple que la menor.

b) Rombo cuya diagonal menor es la cuarta parte de la mayor, y esta última mide 18 cm.

c) Rombo cuya diagonal mayor es el triple de la menor y la suma de las dos resulta 20 cm.

70 ●●● Si una de las diagonales de un rombo mide 20 cm y su área es de 300 cm², ¿cuánto mide la otra diagonal?

71 ●●● Calcula el área de un rectángulo cuyo perímetro es 36 cm y cuya base es 10 cm.

72 ●●● Calcula la medida del perímetro de un rectángulo cuya área es 28,8 cm² sabiendo que la altura mide 4 cm.

73 ●●● En los lados de un campo cuadrangular se han plantado 32 árboles, separados entre sí 5 m. ¿Cuál es su área? ¿Cuánto mide el lado?

74 ●●● Halla el área de un triángulo cuya base mide 9 cm y cuya altura mide dos terceras partes de la base.

75 ●●● Completa la tabla en tu cuaderno.

Área del triángulo	Base	Altura
	15 cm	8 cm
42 cm²		6 cm
12,25 cm²	7 cm	

76 ●●● Calcula el perímetro de un triángulo equilátero sabiendo que su área es 43,3 cm², y su altura, 8,66 cm.

77 ●●● Calcula el área de un trapecio cuyas bases miden 7 y 11 cm, y cuya altura es 5 cm.

78 ●●● Calcula el área de un trapecio isósceles de altura 4 cm, base menor 10 cm y base mayor 3 cm más grande que la menor.

79 ●●● Averigua la base mayor de un trapecio con área 76 cm², base menor de 10 cm y 5 cm de altura.

80 ●●● Calcula el área de estos polígonos regulares que se describen a continuación.

a) Octógono regular de 7,5 cm de lado y 9,05 cm de apotema.

b) Pentágono regular de 2,5 cm de lado y 1,72 cm de apotema.

c) Heptágono regular de 10,4 cm de lado y 10,79 cm de apotema.

d) Pentágono regular de 125 cm de perímetro y 17,2 cm de apotema.

81 ●●● Averigua la apotema de un hexágono regular cuyo lado mide 6 cm y su área es 93,5 cm².

82 ●●● Halla la apotema de un heptágono de lado 6 cm y área 130,8 cm².

83 ●●● Calcula la medida de la apotema de un pentágono regular de perímetro 64,65 cm y área 287,7 cm².

84 ●●● Calcula el área de un círculo que tiene un radio que mide 5,25 cm.

85 ●●● Completa la tabla en tu cuaderno.

Radio del círculo	Área del círculo
5 cm	
7,5 cm	
1,75 cm	

86 ●●● Completa la tabla en tu cuaderno.

Radio del círculo	Área del círculo
	$\frac{25\pi}{4}$ cm²
	50,265 cm²
	9π cm²

87 ●●● Calcula el área de un círculo que está limitado por una circunferencia de 30,16 cm de longitud.

Scanned by CamScanner

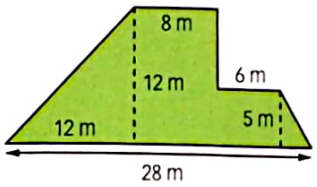
88 Halla el área del círculo en cada caso.

a) La circunferencia que lo delimita tiene un diámetro de 12,8 cm.

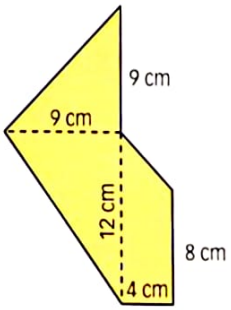
b) La longitud de la circunferencia que lo delimita es 28,9 cm.

c) El radio de la circunferencia que lo delimita mide $\frac{22{,}934}{\pi}$ cm.

89 Obtén el área de la siguiente figura.

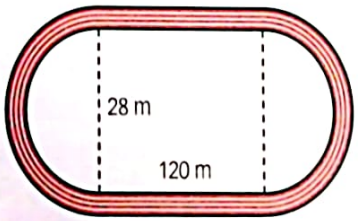


90 Halla el área de la figura.



Problemas

91 Un atleta entrena diariamente en el circuito de la figura. ¿Qué distancia recorre cada día si da 10 vueltas en su entrenamiento?

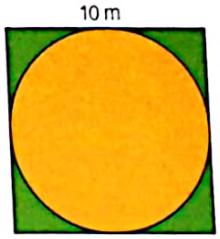


92 ¿Cuánto costará empapelar una pared cuadrada de 3,5 m de lado con un papel que cuesta 4 €/m²?

93 Una habitación cuadrada tiene una superficie de 25 m². Se va a colocar una cenefa alrededor cuyo precio es de 2 €/m. ¿Cuánto costará?

94 En una pista circular se echan 15 kg de arena por metro cuadrado. ¿Qué radio tiene la pista si se han echado 4 710 kg de arena en total?

95 Se desea hacer un círculo con losas en un jardín cuadrado, como indica la figura.



a) ¿Cuánto mide el área enlosada?

b) ¿Qué área ha quedado con césped?

96 Anota las dimensiones de la portada de tu libro preferido y calcula su área. Luego, haz lo mismo con una página (solo en caso de que esta sea menor que la portada) y calcula el área que ocupan todas las páginas del libro. ¿Cuánto ocupa únicamente la parte impresa de cada página?

97 María circula en bicicleta de su casa al trabajo. ¿Qué distancia recorre en su viaje de ida si el radio de las ruedas mide 35 cm y las ruedas giran un total de 1 200 vueltas cada una?

98 ¿Cuántos árboles podremos plantar en un terreno con forma de paralelogramo de 30 m de largo y 32 m de ancho si cada árbol necesita una superficie de 4 m²?

99 Se va a sembrar de césped un campo de golf que tiene forma de trapecio, siendo las medidas de sus bases: una 4 hm, 9 dam y 5 m, y otra 1 hm y 5 m. Si su altura es de 80 m, ¿cuánto costará sembrar el campo si el precio de un metro cuadrado es de 2 €?

100 Halla la longitud de la circunferencia que delimita una rotonda de 162,86 m². Después, calcula el área del círculo que limita un vehículo en su giro alrededor de la rotonda de forma completa, sabiendo que se sitúa en una circunferencia con 3 m más de radio que el de la propia rotonda.

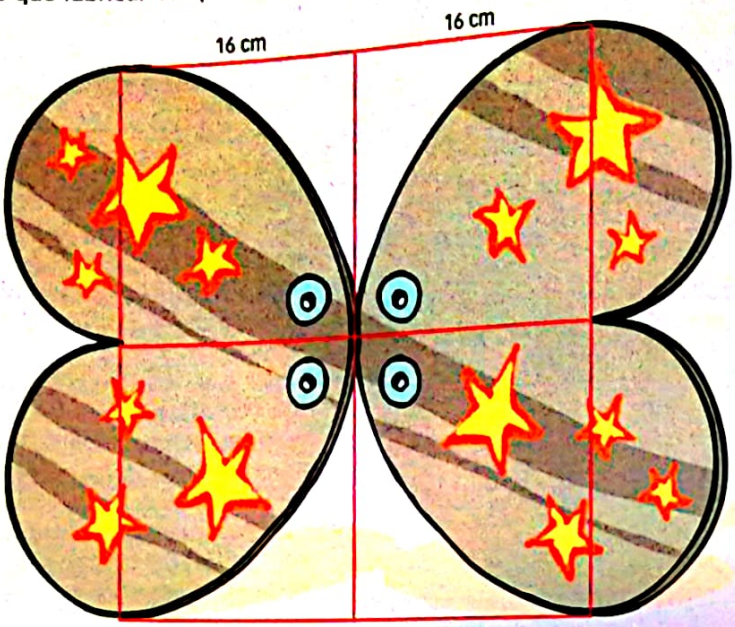
101 Si atas una cuerda a tu lápiz de forma que entre el nudo y el extremo de la cuerda haya 13 cm, ¿cuál es el área de la figura que puedes dibujar con la punta del lápiz fijando el extremo de la cuerda en un punto?

Scanned by CamScanner

SABER HACER

Calcular costes de fabricación

Un herrero tiene que fabricar 162 piezas como esta.



Para ello dispone de una máquina que las puede fabricar una a una, proporcionándole placas de metal con las medidas exactas.

a) ¿Qué medidas debe tener cada placa?

b) Estas placas las tendrá que cortar de una gran plancha de metal de forma cuadrada que tiene 16 m^2 de área. ¿Cuántas placas puede sacar de cada plancha?

c) El metro cuadrado del material de estas planchas cuesta 15,55 €. ¿Cuál es el coste del material necesario para fabricar todas las piezas?

d) Cada pieza lleva 14 adornos, seis estrellas grandes y ocho pequeñas. Estos adornos están elaborados con un material dorado y su precio es de 0,35 € las grandes y 0,27 € las pequeñas. ¿Cuál es el coste de los adornos que necesita para todas las piezas?

e) Considerando solo el material utilizado, ¿a cuánto asciende la fabricación de una pieza?

Scanned by CamScanner