Ecuaciones y sistemas

4

PUNTO DE PARTIDA

En los grandes acontecimientos deportivos intervienen siempre personas que voluntariamente se prestan para ayudar en la organización del evento. Este año, en la Eurocopa de fútbol, que se celebrará en dos países distintos, se necesitarán 45 000 voluntarios. El primer país ha conseguido 17 000 voluntarios más que el segundo. ¿Cuántos voluntarios aportará cada país?

1 Ecuaciones de primer grado

Una **expresión algebraica** es un conjunto de números y letras unidos mediante los signos de las operaciones aritméticas.

Una **ecuación** es una igualdad de expresiones algebraicas que solo se cumple para un cierto valor de la incógnita.

EJEMPLO

1. Determina si las siguientes igualdades son ecuaciones.

a) $2x - 1 = 2(x - 2) + 3 \rightarrow$

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0 - 1 = 2 \cdot (0 - 2) + 3 \rightarrow -1 = -1 \\ x = 1 \rightarrow 2 \cdot 1 - 1 = 2 \cdot (1 - 2) + 3 \rightarrow \quad 1 = 1 \end{cases}$$

Si sustituimos x por cualquier valor, la igualdad siempre se cumple. Una igualdad que se cumple para cualquier valor de las letras se denomina **identidad algebraica**.

b) $4 + 9 = 15 - 2 \rightarrow$ Se verifica siempre.

Es una identidad, pero, al no tener letras, se le llama **identidad numérica**.

c) $2 - 5x = 3x - 6 \rightarrow$

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow 2 - 5 \cdot 0 = 3 \cdot 0 - 6 \rightarrow \quad 2 \neq -6 \\ x = 1 \rightarrow 2 - 5 \cdot 1 = 3 \cdot 1 - 6 \rightarrow -3 = -3 \end{cases}$$

Probando con otros valores de x veríamos que solo se cumple para el valor $x = 1$. Es una **ecuación**.

Llamamos **grado** de una ecuación al mayor exponente que tiene la x. En este caso, es 1 y decimos que es una **ecuación de primer grado**.

Encontrar el valor de x para el que la ecuación se cumple se denomina **resolver la ecuación**, y el valor encontrado, **solución**.

Las expresiones algebraicas separadas por el signo = son los **miembros** de la igualdad. Los miembros se componen de **términos** y a los términos de la ecuación que no llevan x se les denomina **términos independientes**.

Términos

Término independiente $\rightarrow$ $$\underbrace{2 - 5x}_{1.^{\text{er}}\text{ miembro}} = \underbrace{3x - 6}_{2.^{\text{o}}\text{ miembro}}$$ $\leftarrow$ Término independiente

ACTIVIDADES

1 ¿Son ecuaciones las siguientes igualdades? ¿Qué nombres reciben?

a) $4x - 2 + 5x + 16 = 8 + 9x + 6$

b) $\frac{3}{7} - 1 = -\frac{5}{14} - \frac{3}{14}$

c) $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} - \frac{x}{2} = \frac{x}{12}$

2 Determina si son identidades o ecuaciones.

a) $3x - 2 = 4x + 3$

b) $3(x - 1) + 2 = 1 + x + 2(x - 1)$

c) $3 + \frac{x}{2} = -3$

d) $4x - 2(x - 3) = 2x + 6$

2 Ecuaciones equivalentes. Transposición de términos

Dos ecuaciones que tienen la misma solución se llaman **ecuaciones equivalentes**. Para obtener una ecuación equivalente a partir de otra, se pueden utilizar dos métodos:

- Sumar o restar el mismo número o monomio a ambos miembros.
- Multiplicar o dividir por el mismo número ambos miembros.

EJEMPLO

2. **Halla ecuaciones equivalentes a esta, utilizando los métodos de la suma y el producto.**

$$4(x+2)-x=5$$

Primero quitamos el paréntesis, y luego restamos 8 a cada miembro.

$$4x+8-x=5 \xrightarrow{\text{Restamos } 8} 4x+8-x-8=5-8 \rightarrow$$
$$\rightarrow 4x-x=-3 \rightarrow 3x=-3$$

La ecuación obtenida es equivalente a la primera. Como ves, el resultado de restar 8 en ambos miembros es equivalente a pasar el 8, que estaba sumando en el primer miembro, restando al segundo miembro:

$$4x+8-x=5 \rightarrow 4x-x=5-8 \rightarrow 3x=-3$$

A este procedimiento lo llamamos **transponer** un término.

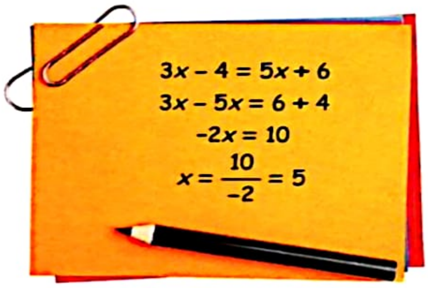
Si ahora dividimos ambos miembros entre 3:

$$3x=-3 \rightarrow \frac{3x}{3}=\frac{-3}{3} \rightarrow x=-1$$

La operación equivalente sería pasar el 3, que estaba multiplicando en el primer miembro, dividiendo al segundo:

$$3x=-3 \rightarrow x=\frac{-3}{3} \rightarrow x=-1$$

Así, mediante la transformación de la ecuación inicial en otras equivalentes, obtenemos la solución de la ecuación, $x=-1$.



ACTIVIDADES

3 **Transforma la primera ecuación en la segunda empleando los métodos de la suma y el producto.**

a) $3-4(x+2)+6x=5x-1 \rightarrow 3x=-4$

b) $x+4-2(2x+5)=\frac{1}{2} \rightarrow -3x=\frac{13}{2}$

c) $\frac{1}{3}+2\left(\frac{x}{3}+1\right)=1 \rightarrow \frac{1+2x}{3}=-1$

d) $\frac{x}{3}+2\left(\frac{x}{6}+1\right)=\frac{4}{3} \rightarrow x=-1$

4 **Utiliza la transposición de términos para resolver las siguientes ecuaciones.**

a) $3(2-3x)+4(x-1)=3(x-2)$

b) $\frac{4x+5}{4}-x=3\frac{2-x}{4}$

c) $12-3x+8\left(x-\frac{1}{2}\right)=2-\frac{1}{3}(6-3x)$

d) $4+2\left(3-\frac{x}{4}\right)=6$

3 Resolución de ecuaciones de primer grado

Resolver una ecuación consiste en transformarla en ecuaciones equivalentes, cada vez más sencillas, hasta llegar a su solución.

EJEMPLO

3. Resuelve la ecuación $\frac{4(x-3)}{3} + 2x = \frac{5x}{6} + 1$.

1.º **Eliminamos paréntesis.**

$$\frac{4(x-3)}{3} + 2x = \frac{5x}{6} + 1 \rightarrow \frac{4x-12}{3} + 2x = \frac{5x}{6} + 1$$

2.º **Quitamos denominadores.** Multiplicamos los dos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, m.c.m. (3, 6) = 6.

$$\frac{4x-12}{3} + 2x = \frac{5x}{6} + 1 \rightarrow 6 \cdot \frac{4x-12}{3} + 6 \cdot 2x = 6 \cdot \frac{5x}{6} + 6 \cdot 1 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2(4x-12) + 12x = 5x + 6 \rightarrow 8x - 24 + 12x = 5x + 6$$

3.º **Agrupamos los términos con x en un miembro, y los números, en el otro.** Utilizamos para ello la transposición de términos.

$$8x + 12x - 5x = 6 + 24 \rightarrow 15x = 30$$

4.º **Despejamos la x.** El 15, que está multiplicando en el primer miembro, pasa dividiendo al segundo.

$$15x = 30 \rightarrow x = \frac{30}{15} \rightarrow x = 2$$

5.º **Comprobamos la solución.** Sustituimos la solución en la ecuación inicial y vemos que se cumple la igualdad.

$$\frac{4(x-3)}{3} + 2x = \frac{5x}{6} + 1 \xrightarrow{x=2} \frac{4(2-3)}{3} + 2 \cdot 2 = \frac{5 \cdot 2}{6} + 1 \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{4 \cdot (-1)}{3} + 4 = \frac{10}{6} + 1 \rightarrow \frac{-4}{3} + 4 = \frac{16}{6} \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{8}{3} = \frac{16}{6} \rightarrow \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$$

La igualdad se cumple y, por tanto, $x = 2$ es solución de la ecuación.

4 Resolución de problemas mediante ecuaciones de primer grado

Los enunciados de algunos problemas pueden expresarse por medio de ecuaciones. La cantidad que desconocemos será la incógnita, x.

EJEMPLO

4. Después de vender la cuarta parte de sus tierras, a Ramón le quedan 450 ha de terreno. ¿Cuántas hectáreas tenía inicialmente?

Para resolver este tipo de problemas hay que seguir una serie de pasos:

1.º Reconocemos la incógnita.

Superficie inicial $\longrightarrow x$

Superficie vendida $\longrightarrow \dfrac{x}{4}$

2.º Planteamos la ecuación.

La superficie que tenía menos la vendida tiene que ser igual a 450 ha.

$$x - \frac{x}{4} = 450$$

3.º Resolvemos la ecuación.

$$x - \frac{x}{4} = 450 \xrightarrow{\text{m.c.m.}(1,4)=4} 4x - 4 \cdot \frac{x}{4} = 4 \cdot 450 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x - x = 1\,800 \rightarrow 3x = 1\,800 \rightarrow x = \frac{1\,800}{3} = 600$$

4.º Comprobamos e interpretamos el resultado.

$$x - \frac{x}{4} = 450 \xrightarrow{x=600} 600 - \frac{600}{4} = 450 \rightarrow$$

$$\rightarrow 600 - 150 = 450 \rightarrow 450 = 450$$

Luego $x = 600$ es solución de la ecuación y, por tanto, Ramón, antes de vender parte de sus tierras, tenía 600 ha de terreno.

Pasos a seguir

1.º **Comprender** el problema e **identificar** la incógnita.
2.º **Plantear** la ecuación.
3.º **Resolver** la ecuación.
4.º **Comprobar** la solución e **interpretar** el resultado.

ACTIVIDADES

7 Juan y Concha quieren montar un negocio y cada uno aporta una cantidad de dinero. Entre ambos reúnen 13 000 €. Si Juan ha puesto el doble de dinero que Concha menos 500 €, ¿cuánto ha puesto cada uno?

8 Arturo quiere destinar parte de sus ahorros a obras sociales, por lo que dona $\frac{1}{3}$ a una ONG, $\frac{3}{5}$ a otra y 175,36 € a una tercera. Tras hacer dichas donaciones, aún le quedan 57,64 €. ¿Cuánto tenía ahorrado? ¿Qué cantidades reparte a cada ONG?

9 Enrique, haciendo inventario en su almacén, ha comprobado que el número de arandelas supera en 8 unidades al doble del número de tuercas, y que hay la mitad de tornillos que de arandelas. Si entre tuercas y tornillos hay 2 500 piezas, ¿cuántas arandelas ha contado Enrique al realizar su inventario?

5 Ecuaciones de segundo grado

Tipos de ecuaciones de segundo grado incompletas

- $ax^2 + c = 0$ si $b = 0$
- $ax^2 + bx = 0$ si $c = 0$
- $ax^2 = 0$ si $b = 0$ y $c = 0$

En una **ecuación de segundo grado**, el máximo exponente de x es 2. Su forma general es:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a \neq 0$$

Esta ecuación se llama **completa** porque todos sus coeficientes son distintos de 0. Si alguno de los coeficientes, b o c, es igual a 0, la ecuación se llama **incompleta**.

EJEMPLOS

5. Identifica los coeficientes a, b y c de las siguientes ecuaciones.

a) $3x^2 - 6 = 0$

b) $4x^2 + 8x = 0$

c) $5x^2 - x + 2 = 0$

d) $3x^2 = 0$

a) $\begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = -6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \\ c = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a = 5 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

Las ecuaciones a), b) y d) reciben el nombre de **incompletas**, ya que alguno de sus coeficientes es 0. La ecuación c) es **completa**, porque sus coeficientes son todos distintos de 0.

En toda ecuación de segundo grado, el coeficiente a es distinto de 0.

6. Comprueba que los valores $x = 4$ y $x = -1$ son solución de la ecuación $x^2 - 3x - 4 = 0$.

Sustituimos estos números en la ecuación.

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \xrightarrow{x=4} 4^2 - 3 \cdot 4 - 4 = 0 \rightarrow 16 - 12 - 4 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \xrightarrow{x=-1} (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 4 = 0 \rightarrow 1 + 3 - 4 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

Ambos números verifican la ecuación, es decir, son sus soluciones. A las soluciones de una ecuación también se les llama **raíces de la ecuación.**

Una ecuación de segundo grado puede tener dos soluciones, una o ninguna.

- $x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$ Tiene dos soluciones.
- $2x^2 = 0 \rightarrow x = 0$. Solo tiene una solución.
- $x^2 = -1$. No tiene ninguna solución.

ACTIVIDADES

10 **Localiza los valores de a, b y c en estas ecuaciones, y di si son completas o incompletas.**

a) $4x - 3x^2 + 1 = 1$

b) $3 - x + 2x^2 = 0$

c) $x^2 - 3x + 6 = 0$

d) $\dfrac{3x^2}{4} - 4x + 2 = 4$

11 **Averigua si los valores de x que se indican son soluciones de las ecuaciones.**

a) $x^2 - 7x - 18 = 0$, para $x = -2$ y $x = 7$

b) $x^2 - 4x + 3 = 0$, para $x = 3$ y $x = 1$

c) $3x^2 + x - 10 = 0$, para $x = -2$ y $x = -10$

d) $20x^2 + 25x + 6 = 0$, para $x = -\dfrac{1}{4}$ y $x = 5$

6 Resolución de ecuaciones de segundo grado

Para resolver una ecuación de segundo grado completa, utilizamos esta fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A la expresión $b^2 - 4ac$ que hay dentro de la raíz se le llama **discriminante**. Dependiendo de su signo, la ecuación puede tener dos soluciones, una o ninguna.

Número de soluciones según el signo del discriminante

- Si $b^2 - 4ac > 0 \rightarrow$ Tiene dos soluciones.
- Si $b^2 - 4ac = 0 \rightarrow$ Tiene una solución.
- Si $b^2 - 4ac < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

EJEMPLOS

7. Resuelve la ecuación $x^2 - 2x - 15 = 0$.

Aplicamos la fórmula teniendo en cuenta que $a = 1$, $b = -2$ y $c = -15$.

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{2+8}{2} = 5 \\ x_2 = \dfrac{2-8}{2} = -3 \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 5$ y $x_2 = -3$.

8. Resuelve la ecuación $2x^2 - 32 = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -32 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-32)}}{2 \cdot 2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{16}{4} = 4 \\ x_2 = \dfrac{-16}{4} = -4 \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 4$ y $x_2 = -4$.

9. Determina el número de soluciones de estas ecuaciones.

a) $9x^2 + x = 0 \xrightarrow{a=9, b=1, c=0} 1^2 - 4 \cdot 9 \cdot 0 = 1 > 0 \rightarrow$ Dos soluciones.

b) $x^2 + 2x + 1 = 0 \xrightarrow{a=1, b=2, c=1} 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \rightarrow$ Una solución.

c) $x^2 + 4 = 0 \xrightarrow{a=1, b=0, c=4} 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -16 < 0 \rightarrow$ Sin solución.

El signo $\pm$ indica que podemos obtener las dos soluciones de la ecuación, una sumando y la otra restando.

Las soluciones de la ecuación de segundo grado nos permiten factorizar el polinomio.

$x^2 - 2x - 15 =$
$= (x - 5) \cdot (x + 3)$

ACTIVIDADES

12 Resuelve aplicando la fórmula general.

a) $x^2 - 4x - 12 = 0$
b) $2x^2 + 7x + 3 = 0$
c) $3x^2 - 5x + 2 = 0$
d) $x^2 + 3x + 4 = 0$

13 Resuelve sacando factor común.

a) $x^2 - 6x = 0$
b) $2x^2 + 8x = 0$
c) $\dfrac{x^2}{9} - x = 0$
d) $3x^2 + 12x = 0$
e) $3(x^2 - 2x) = 0$
f) $2x^2 - \dfrac{5x}{3} = 0$

14 Resuelve estas ecuaciones.

a) $3x^2 - 27 = 0$
b) $x^2 - 16 = 0$
c) $\dfrac{5}{2}x^2 - 10 = 0$
d) $28 - 7x^2 = 0$
e) $5x^2 + 30 = 0$
f) $5x^2 - 30 = 0$

15 Calcula el número de soluciones de estas ecuaciones.

a) $x^2 + 3x + 1 = 0$
b) $x^2 + 3x - 1 = 0$
c) $x^2 + 4x + 4 = 0$
d) $x^2 - 16 = 0$
e) $x^2 + 5x = 0$
f) $4x^2 + 8x = 0$

7 Resolución de problemas mediante ecuaciones de segundo grado

La solución de algunos problemas se puede calcular expresando su enunciado mediante una ecuación de segundo grado, y resolviéndola.

EJEMPLO

10. La suma de un número más el cuadrado de ese mismo número es 20. ¿De qué número se trata?

Para resolver este tipo de problemas hay que seguir una serie de pasos:

1.º Reconocemos la incógnita.

Un número $\longrightarrow x$

El cuadrado de ese número $\rightarrow x^2$

2.º Planteamos la ecuación.

La suma del número más su cuadrado es 20.

$$x + x^2 = 20$$

3.º Resolvemos la ecuación.

$$x + x^2 = 20 \rightarrow x^2 + x - 20 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 9}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+9}{2} = 4 \\ x_2 = \dfrac{-1-9}{2} = -5 \end{cases}$$

4.º Comprobamos el resultado.

$$x + x^2 = 20 \xrightarrow[x=-5]{x=4} \begin{cases} x = 4 \longrightarrow 4 + 4^2 = 20 \longrightarrow 20 = 20 \\ x = -5 \rightarrow (-5) + (-5)^2 = 20 \rightarrow 20 = 20 \end{cases}$$

Existen dos números que cumplen la condición del enunciado, 4 y −5.

ACTIVIDADES

16 Si al cuadrado de un número le restamos ese mismo número, el resultado es 30. ¿De qué número se trata?

17 El producto de un número por su consecutivo es igual a 6. ¿De qué número se trata? ¿Hay una única solución?

18 El área de un cuadrado es 81 cm². ¿Cuál es la longitud de su lado? ¿Existe más de una solución?

19 Al multiplicar un número por su número anterior el resultado obtenido es igual a 9 veces ese número. ¿Qué número es? ¿Hay más de una solución?

20 El área de un terreno rectangular es 162 m². Si el terreno mide el doble de largo que de ancho, ¿cuáles son sus dimensiones? ¿Existe una única solución?

21 El largo de una hoja de papel es 4 cm mayor que su ancho. Si cortamos a lo largo una tira rectangular de 2 cm de ancho, queda un área de papel de 16 cm². ¿Qué dimensiones tiene la hoja?

8 Sistemas de ecuaciones

Una **ecuación lineal con dos incógnitas** es una expresión de la forma $ax + by = c$. Un conjunto de dos ecuaciones como la anterior es un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas**, x e y.

El número de soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales puede ser 0, 1 o infinito.

EJEMPLOS

11. Encuentra la solución del sistema: $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x + 4y = 5 \end{cases}$

Como ves en la tabla, hay pares de valores de x e y que solo verifican una de las ecuaciones. Reciben el nombre de **soluciones particulares**.

x	−3	3	1	−1
y	−5	4	1	−2
$3x - 2y$	1	1	1	1

x	−3	3	1	5
y	2	1/2	1	0
$x + 4y$	5	5	5	5

El par $x = 1$ e $y = 1$ verifica simultáneamente ambas ecuaciones:

$$3x - 2y = 1 \xrightarrow{x\,=\,1\text{ e }y\,=\,1} 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1 \rightarrow 3 - 2 = 1 \rightarrow 1 = 1$$

$$x + 4y = 5 \xrightarrow{x\,=\,1\text{ e }y\,=\,1} 1 + 4 \cdot 1 = 5 \longrightarrow 1 + 4 = 5 \rightarrow 5 = 5$$

Si un par de valores de x e y verifica ambas ecuaciones, decimos que es **solución del sistema**. En este caso, la solución es $x = 1$ e $y = 1$.

12. Halla las soluciones de los sistemas: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$ y $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$

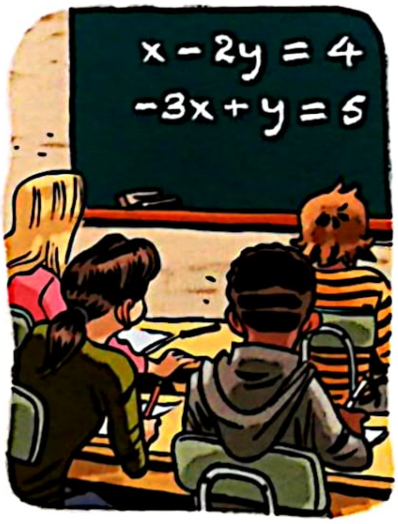
En el primer sistema, la suma de los valores de x e y tiene distintos resultados. No podemos encontrar dos números que sumen a la vez 3 y 5. Decimos que este sistema **no tiene solución**.

En el segundo sistema, la segunda ecuación es el resultado de multiplicar la primera por 2. Todos los valores de x e y que verifiquen la primera ecuación, verificarán también la segunda:

$$x = 3 \text{ e } y = 0 \begin{cases} x - 2y = 3 \rightarrow 3 - 2 \cdot 0 = 3 \longrightarrow 3 = 3 \\ 2x - 4y = 6 \rightarrow 2 \cdot 3 - 4 \cdot 0 = 6 \rightarrow 6 = 6 \end{cases}$$

$$x = 1 \text{ e } y = -1 \begin{cases} x - 2y = 3 \rightarrow 1 - 2 \cdot (-1) = 3 \longrightarrow 3 = 3 \\ 2x - 4y = 6 \rightarrow 2 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) = 6 \rightarrow 6 = 6 \end{cases}$$

Por tanto, este sistema tiene **infinitas soluciones**.



ACTIVIDADES

22 Encuentra la solución de los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 4x + y = 5 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x + 4y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ -x + 4y = -2 \end{cases}$

23 ¿Cuántas soluciones tendrán estos sistemas?

a) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 6x - 2y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 3y = -2 \\ 5x + 3y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = -\frac{1}{4} \end{cases}$

9 Resolución de sistemas. Método de sustitución

Para resolver un sistema por el **método de sustitución** seguimos estos pasos:

1.º Despejamos una de las incógnitas en una de las ecuaciones.

2.º Sustituimos el valor de esa incógnita en la otra ecuación y resolvemos la ecuación con una sola incógnita que resulta.

EJEMPLO

13. Resuelve por el método de sustitución: $\begin{cases} 4x + y = 2 \\ -x + 3y = -7 \end{cases}$

1.º Despejamos una de las incógnitas en una ecuación. Conviene elegir aquella que resulte más fácil de despejar. En este caso, despejamos la y de la primera ecuación.

$$4x + y = 2 \rightarrow y = 2 - 4x$$

2.º Sustituimos el valor obtenido en la segunda ecuación. Operamos y despejamos x.

$$-x + 3y = -7 \rightarrow -x + 3 \cdot (2 - 4x) = -7 \rightarrow$$
$$\rightarrow -x + 6 - 12x = -7 \rightarrow -13x = -13 \rightarrow x = 1$$

Una vez obtenido el valor de x, sustituimos para calcular el valor de y:

$$y = 2 - 4x \xrightarrow{x=1} y = 2 - 4 \cdot 1 \rightarrow y = -2$$

Así, la solución del sistema es $x = 1$ e $y = -2$.

En este caso hemos despejado la y en la primera ecuación, pero podríamos haber despejado cualquiera de las incógnitas en cualquiera de las ecuaciones. No es conveniente despejar la x en la primera ecuación, o la y en la segunda, porque obtendríamos una ecuación con denominadores.

Finalmente, se comprueba que la solución es correcta. Sustituimos los valores hallados en las ecuaciones para ver si las verifican.

$$\begin{cases} 4x + y = 2 \xrightarrow[y=-2]{x=1} 4 \cdot 1 + (-2) = 2 \rightarrow 4 - 2 = 2 \rightarrow 2 = 2 \\ -x + 3y = -7 \xrightarrow[y=-2]{x=1} -1 + 3 \cdot (-2) = -7 \rightarrow -1 - 6 = -7 \rightarrow -7 = -7 \end{cases}$$

- **Si despejamos x en la primera ecuación:**

$$4x + y = 2 \rightarrow x = \frac{2 - y}{4}$$

- **Si despejamos y en la segunda:**

$$-x + 3y = -7 \rightarrow y = \frac{-7 + x}{3}$$

10 Resolución de sistemas. Método de igualación

Para resolver un sistema por el **método de igualación** se siguen estos pasos:

1.º Elegimos una de las incógnitas y la despejamos en las dos ecuaciones.

2.º Igualamos las expresiones obtenidas y resolvemos la ecuación resultante.

EJEMPLO

14. Resuelve por el método de igualación: $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ x + 3y = -6 \end{cases}$

1.º Despejamos x en las dos ecuaciones.

$$x - 2y = -1 \rightarrow x = -1 + 2y$$
$$x + 3y = -6 \rightarrow x = -6 - 3y$$

2.º Igualamos las expresiones que hemos obtenido, operamos y calculamos el valor de y.

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 + 2y \\ x = -6 - 3y \end{array}\right\} \rightarrow -1 + 2y = -6 - 3y \rightarrow 5y = -5 \rightarrow y = -1$$

Para calcular el valor de x, sustituimos el valor de y en cualquiera de las expresiones anteriores.

$$x = -1 + 2y \xrightarrow{y=-1} x = -1 + 2\cdot(-1) \rightarrow x = -1 - 2 \rightarrow x = -3$$

Al igual que en el método de sustitución, hemos elegido la incógnita más sencilla a la hora de despejar en ambas ecuaciones (si hubiésemos despejado y obtendríamos expresiones fraccionarias).

Comprobamos que la solución obtenida es correcta.

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \xrightarrow[y=-1]{x=-3} -3 - 2\cdot(-1) = -1 \rightarrow -3 + 2 = -1 \rightarrow -1 = -1 \\ x + 3y = -6 \xrightarrow[y=-1]{x=-3} -3 + 3\cdot(-1) = -6 \rightarrow -3 - 3 = -6 \rightarrow -6 = -6 \end{cases}$$

ACTIVIDADES

27 Resuelve por el método de igualación.

a) $\begin{cases} 6x - y = 5 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = y \\ 3x - 5y = 0 \end{cases}$

28 Resuelve por el método de igualación.

a) $\begin{cases} -\dfrac{3}{5}x + y = -1 \\ y - \dfrac{1}{2}x = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 3y - 2 \\ x - 2 = 2\cdot(y + 3) \end{cases}$

29 Resuelve por el método de igualación.

a) $\begin{cases} 5x - 4y = 9 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 4y = 3 \\ 3x - y = x - 1 \end{cases}$

30 Resuelve por igualación y por sustitución.

$$\begin{cases} 2x + 3y = -5 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$$

11 Resolución de sistemas. Método de reducción

Para resolver un sistema por el **método de reducción**:

1.º Multiplicamos o dividimos sus ecuaciones hasta conseguir que los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales y de signo contrario.

2.º Sumamos las ecuaciones y resolvemos la ecuación resultante.

Aunque todos los métodos sirven para resolver cualquier sistema, piensa bien cuál es el más conveniente en cada caso.

EJEMPLO

15. Resuelve por el método de reducción: $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x + y = -2 \end{cases}$

1.º Multiplicando la segunda ecuación por -3 tendremos $+3y$ en la primera ecuación, y $-3y$ en la segunda.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x + y = -2 \xrightarrow{\cdot(-3)} \end{cases} \quad \begin{matrix} 2x + 3y = 7 \\ -15x - 3y = 6 \end{matrix}$$

2.º Sumamos las ecuaciones y resolvemos.

$$\begin{array}{rcl} 2x \cancel{+3y} &=& 7 \\ -15x \cancel{-3y} &=& 6 \\ \hline -13x &=& 13 \rightarrow x = -1 \end{array}$$

Para hallar el valor de y, sustituimos en una de las ecuaciones iniciales.

$5x + y = -2 \xrightarrow{x=-1} 5 \cdot (-1) + y = -2 \rightarrow -5 + y = -2 \rightarrow y = 3$

Así, la solución del sistema es $x = -1$ e $y = 3$.

También podríamos haber eliminado la x multiplicando la primera ecuación por 5 y la segunda por -2.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \xrightarrow{\cdot 5} \\ 5x + y = -2 \xrightarrow{\cdot(-2)} \end{cases} \begin{array}{rcl} \cancel{10x} + 15y &=& 35 \\ -\cancel{10x} - 2y &=& 4 \\ \hline 13y &=& 39 \rightarrow y = 3 \end{array}$$

Por último, comprobamos la solución:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \xrightarrow[y=3]{x=-1} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 = 7 \rightarrow -2 + 9 = 7 \rightarrow 7 = 7 \\ 5x + y = -2 \xrightarrow[y=3]{x=-1} 5 \cdot (-1) + 3 = -2 \rightarrow -5 + 3 = -2 \rightarrow -2 = -2 \end{cases}$$

12 Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

Para resolver problemas por medio de sistemas hay que reconocer las dos incógnitas y plantear las dos ecuaciones del sistema con los datos del problema.

EJEMPLO

16. Un hotel tiene 150 habitaciones. El número de habitaciones dobles es un tercio del número de habitaciones sencillas menos 10. ¿Cuántas habitaciones son dobles?

1.º Determinamos las incógnitas.

$x \rightarrow$ Número de habitaciones sencillas

$y \rightarrow$ Número de habitaciones dobles

2.º Planteamos las ecuaciones.

- El número total de habitaciones es 150 $\rightarrow x + y = 150$
- El número de habitaciones dobles (y) es igual (=) a un tercio de las sencillas $\left(\frac{1}{3}x\right)$ menos 10 (-10), es decir, $y = \frac{1}{3}x - 10$.

3.º Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 150 \rightarrow y = 150 - x \\ y = \frac{1}{3}x - 10 \end{array}\right\} \rightarrow 150 - x = \frac{1}{3}x - 10$$

$$450 - 3x = x - 30 \rightarrow 480 = 4x \rightarrow x = 120$$

$$y = 150 - x \rightarrow y = 150 - 120 \rightarrow y = 30$$

4.º Comprobamos e interpretamos la solución.

$$x + y = 150 \xrightarrow{x\,=\,120 \text{ e } y\,=\,30} 120 + 30 = 150 \rightarrow 150 = 150$$

$$y = \frac{1}{3}x - 10 \xrightarrow{x\,=\,120 \text{ e } y\,=\,30} 30 = \frac{120}{3} - 10 \rightarrow 30 = 30$$

En el hotel hay 30 habitaciones dobles y 120 sencillas.

ACTIVIDADES

34 El ordenador de Susana tiene dos discos duros con una memoria total de 1 000 gigas. El de menor capacidad tiene una cuarta parte de la capacidad del otro más 250 gigas. ¿Cuánta memoria tiene cada uno de los discos?

35 Andrés ha decidido poner, en la sala de espera de su consulta, 2 sofás y 10 sillas, que le cuestan 3 500 €. La otra opción era poner 3 sofás y 5 sillas, pero su precio ascendía a 4 200 €. ¿Cuánto cuesta cada sofá y cada silla?

36 Un pasaje de avión de ida y vuelta y 3 días de coche de alquiler cuestan 1 200 €. Si vamos en avión y volvemos en coche (4 días de alquiler), nos habría costado 750 €. ¿Cuánto vale cada viaje de avión y el alquiler diario del coche?

Ecuaciones de primer grado

37 Clasifica las siguientes igualdades en ecuaciones e identidades. Resuelve las que sean ecuaciones.

a) $2 \cdot (2x - 1) + 3 = x + 3 \cdot (1 + x) - 2$

b) $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = x - \frac{1}{2}$

c) $7 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot 36$

d) $4x - 2 = x + 4$

e) $5 \cdot (2x - 3) - 2 \cdot (x - 1) = 8 \cdot (x + 2) + 1$

f) $3 \cdot (3x - 1) - 2 \cdot (4x - 5) = -2(x + 3) + 1$

g) $x + 2 \cdot (x - 5) - \frac{1}{3}x = 4 - 2x$

h) $5x - 6 \cdot (x + 2) - x = -2 \cdot (x + 6)$

38 Resuelve estas ecuaciones de primer grado.

a) $3x - 8 + 2 \cdot (x + 7) - 2 = 4x + 2 \cdot (x - 1)$

b) $5 \cdot (x + 3) - 3 \cdot (2x - 3) = -2x + 7$

c) $2 \cdot (x - 5) + x + 2 = 4 - 3x$

d) $12 - 4 \cdot (2 - x) = 2x + 4$

e) $2 - 2 \cdot (x - 4) + x = 3 - 2x$

f) $5x + 7 - 3 \cdot (2 - x) = 3x - 4$

g) $5(x - 2) + 9(2 - x) = 2x - 4$

39 Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado.

a) $\frac{1}{3}(x + 6) - 2 \cdot (x + 4) = x - \frac{2}{3}x$

b) $\frac{2x - 6}{2} - 2 \cdot (x - 1) = 2 \cdot (x + 2) + 1$

c) $-\frac{3x}{4} + 2 \cdot (6 - x) = \frac{x}{4} - 4 \cdot (-x + 5) + x$

d) $\frac{3x + 2}{5} + 1 = 2 \cdot (4x + 3) - 6 \cdot (x + 1)$

e) $\frac{x + 4}{6} - \frac{2x}{3} = \frac{x - 1}{2} + 1 - \frac{x}{3}$

f) $1 + \frac{2x + 1}{6} - \frac{2x + 1}{3} = \frac{3 - 2x}{5}$

Resolver problemas mediante ecuaciones de primer grado

40 El perímetro de un rectángulo es de 28 cm. Si la anchura es 6 cm mayor que la altura, ¿cuáles son sus dimensiones?

41 Un entrenador personal ha recomendado a su cliente que dedique un tiempo a correr y las dos terceras partes de ese tiempo a hacer ejercicios aeróbicos. Si en total va a entrenar una hora diaria, ¿cuántos minutos debe dedicar a cada disciplina?

42 Juana prestó a su hermano la quinta parte de sus ahorros. Compró después un libro con la sexta parte del dinero que le quedó. Al final a Juana le quedaron 40 euros. ¿Cuánto dinero tenía Juana ahorrado?

43 La diferencia de la mitad de un número menos la tercera parte del número siguiente da como resultado 25. ¿Cuál es el número?

44 Hace diez años, la edad de Marta era la mitad de la edad que tiene ahora. ¿Cuántos años tiene?

45 Para hacer la mudanza, Esther ha metido todas sus cosas en cajas. Ha ocupado la quinta parte de las cajas con ropa, la sexta parte con vajilla, la tercera parte con libros y discos, y aún le quedan 12 cajas por llenar. ¿Cuántas cajas tiene en total?

46 El largo de un campo de juegos era 20 m mayor que su ancho. Se amplió el campo 5 m de largo y 4 m de ancho y el perímetro del nuevo campo era 150 m. ¿Qué dimensiones tenía el campo originalmente?

47 La mitad de un número más un tercio del número siguiente es igual a ese número menos 4. ¿De qué número se trata?

48 Rubén ha decidido presentarse a una maratón y se prepara corriendo cada día más kilómetros. El segundo día corre el doble de kilómetros que el primero menos 8, y el tercero, el triple del primero menos 10. Si en los tres primeros días de entrenamiento ha recorrido 198 km, ¿cuántos km ha recorrido cada día?

49 Lucía ha hecho hoy dos llamadas telefónicas con una duración total de 43 minutos. La segunda llamada ha durado el triple de la primera menos 5 minutos. ¿Cuánto ha durado cada llamada?

50 La suma de un número más sus dos números siguientes es igual que la suma de los dos números anteriores a él más 11. ¿Qué número es?

Ecuaciones de segundo grado

51 Indica los valores de *a*, *b* y *c* en las siguientes ecuaciones. ¿Son completas o incompletas?

a) $-8x^2 + x = 0$

b) $x^2 - \frac{1}{9} = 0$

c) $\frac{3}{2}x^2 + 5x - 1 = 0$

d) $-4x^2 - 3 = 0$

e) $2x^2 + 4x - 1 = 0$

f) $6x^2 + 4x = 0$

g) $-5x^2 + 25 = 0$

h) $\frac{4}{3}x^2 + 5x - 3 = 0$

52 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $x^2 + 6x + 8 = 0$

c) $x^2 - 6x - 7 = 0$

d) $x^2 + 3x - 10 = 0$

e) $x^2 + 5x - 6 = 0$

f) $x^2 - x - 12 = 0$

g) $x^2 + 5x - 24 = 0$

h) $x^2 - 4x - 12 = 0$

53 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $-8x^2 + 2x = 0$

b) $4x^2 - 8x = 0$

c) $x^2 - \frac{9}{4} = 0$

d) $6x^2 + 12x = 0$

e) $-3x^2 + 21 = 0$

f) $12x^2 - 48 = 0$

g) $-7x^2 + 14x = 0$

h) $\frac{2}{3}x^2 - 6 = 0$

Resolver problemas mediante ecuaciones de segundo grado

54 Dos números suman 19. La suma de sus cuadrados es 193. ¿Cuáles son los números?

55 La diagonal de un cuadrado mide 72 cm. ¿Cuánto mide su lado?

56 El perímetro de un rectángulo es de 26 cm, y su área de 40 cm². Halla la longitud de sus lados.

57 La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es 35. Halla dichos números.

58 El cuadrado de un número más cinco veces dicho número es 24. ¿Cuál es el número?

59 El producto de un número por otro 5 unidades mayor es 6. ¿Cuál es el número? ¿Hay más de un resultado?

60 Los lados de un rectángulo se diferencian en 4 cm y su área es de 60 cm². ¿Cuáles son las longitudes de los dos lados del rectángulo?

61 El área de una parcela cuadrada es igual al área de una parcela rectangular que tiene el triple de largo que ella y 3 m de ancho. ¿Qué dimensiones tiene?

62 La suma de los cuadrados de un número, de su número anterior y de su número siguiente es 149. ¿Qué números son?

Planificar unas vacaciones

La familia de Rafa está preparando las próximas vacaciones. Quieren una semana en un hotel en la playa. Llegarán allí en avión y alquilarán un coche para recorrer la zona.

A la hora de planificar el viaje, buscan en Internet las ofertas más económicas y encuentran las siguientes:

- Avión (ida y vuelta).

  El avión con salida a las 23:50 h cuesta 60 € más que el que sale a las 18:35 h. En concreto, es una vez y media más caro. Aunque si cogen el de las 23:50 h pagarán una noche menos de hotel.

- Hotel.

  Una noche en el hotel Paraíso vale 35 € más que en el hotel Bali. Si cogen el hotel Bali, por las 7 noches que quieren estar, se gastarían 784 €, aunque el hotel Paraíso tiene una oferta en la que pagando 3 noches o más te dan una noche gratis.

- Coche de alquiler.

  El precio por día en la agencia Supercar es 10 € más que en la agencia Fastcar pero en esta agencia te cobran 120 € de gastos de mantenimiento si lo alquilas más de 5 días. Según su publicidad, en la agencia Fastcar el alquiler de un coche durante toda una semana cuesta 400 €.

Plantea las ecuaciones que le permitirán a la familia de Rafa encontrar las mejores ofertas.

a) ¿Cuánto cuesta cada avión?

b) ¿En qué hotel es más barato alojarse?

c) ¿Cuál de las agencias de coches ofrece mejores precios?

d) Suponiendo que se decantan por la oferta más económica, ¿cuál es el precio final de las vacaciones?