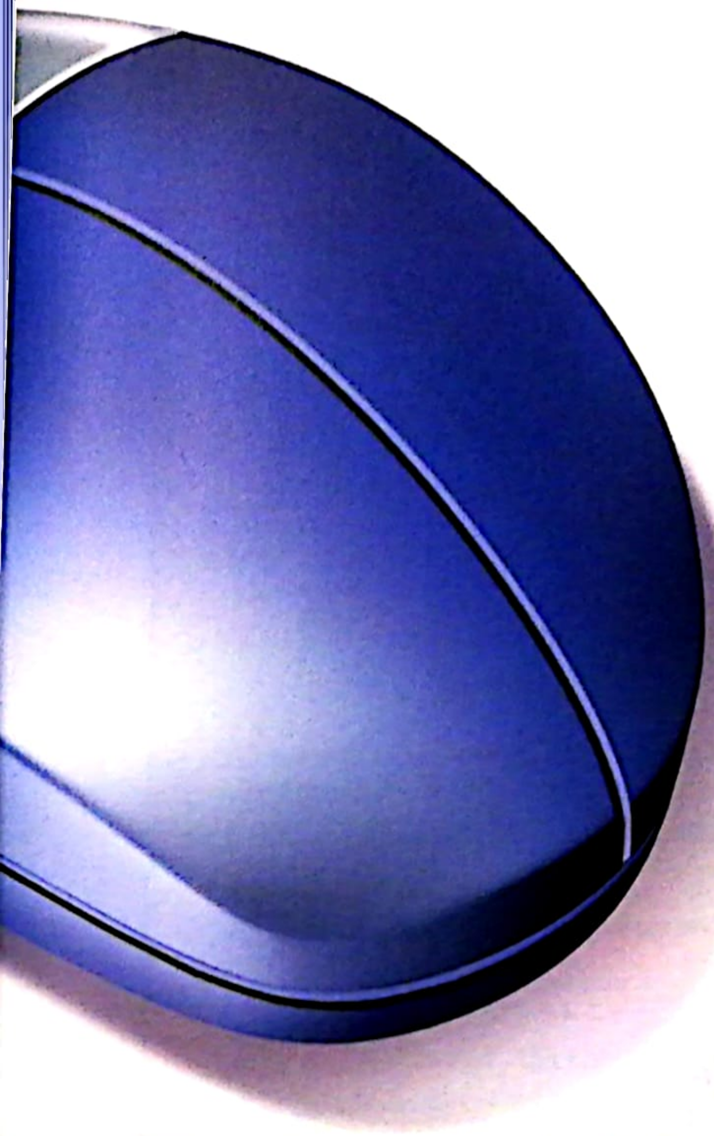
Sistemas de ecuaciones

7



SABER

- Ecuaciones lineales
- Sistemas de ecuaciones lineales
- Resolución de sistemas de ecuaciones
- Métodos de resolución de sistemas
- Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

SABER HACER

- Calcular soluciones de una ecuación lineal
- Resolver un sistema de ecuaciones lineales
- Resolver problemas utilizando sistemas de ecuaciones

VIDA COTIDIANA

El ratón de ordenador

El ratón fue sin duda una de las grandes revoluciones de la informática, haciendo que un uso especializado de la informática, pasase a ser un uso habitual y para la mayoría de la población.

- Una tienda de informática vende dos tipos de ratones. Un modelo es el doble de caro que el otro. ¿Cuánto cuesta cada modelo si el precio de dos ratones, uno de cada tipo, es 9 € y cuestan lo mismo que tres ratones del modelo más barato?

1 Ecuaciones lineales

Una **ecuación lineal** es una ecuación de primer grado con una o varias incógnitas.

Una **ecuación lineal con dos incógnitas** es una ecuación lineal que podemos expresar de la forma:

$$ax + by = c$$

siendo x e y las incógnitas y a, b y c números conocidos.

EJEMPLO

1. Determina si estas ecuaciones son lineales.
   a) $5x + 4 = 0 \rightarrow$ Ecuación lineal con una incógnita.
   b) $2xy - 3 = 0 \rightarrow$ No es ecuación lineal, tiene grado 2.
   c) $-4x - 9y = 7 \rightarrow$ Ecuación lineal con dos incógnitas.

Para obtener una ecuación equivalente a otra dada, basta con multiplicar o dividir toda la ecuación por un número distinto de cero.

$$x + y = 6$$
$$\downarrow$$
$$2 \cdot (x + y) = 2 \cdot 6$$
$$2x + 2y = 12$$

$x + y = 6$ y $2x + 2y = 12$ son ecuaciones equivalentes.

Una **solución de una ecuación lineal** con dos incógnitas es cualquier par de valores, uno para cada incógnita, que hacen cierta la igualdad.

Dos **ecuaciones lineales** son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Una ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones. Sin embargo, existen parejas de valores que no son solución de la ecuación.

EJEMPLO

2. Indica si estos valores son soluciones de la ecuación $2x + y = 5$.
   a) $x = 4, y = -1$
   $2x + y = 5 \xrightarrow{x=4,\, y=-1} 2 \cdot 4 + (-1) \neq 5 \rightarrow$ No es solución.
   b) $x = 2, y = 1$
   $2x + y = 5 \xrightarrow{x=2,\, y=1} 2 \cdot 2 + 1 = 5 \rightarrow$ Es solución.
   c) $x = 0, y = 5$
   $2x + y = 5 \xrightarrow{x=0,\, y=5} 2 \cdot 0 + 5 = 5 \rightarrow$ Es solución.

ACTIVIDADES

1 PRACTICA. Averigua cuáles de estas ecuaciones son lineales e indica su número de incógnitas.

a) $x + y = 0$
b) $3(x - y) = 10$
c) $a^2 - 2 = 0$
d) $ab - 2a = 0$

2 APLICA. Di si $x = 1$ e $y = -2$ es solución.

a) $2x - 3y = -3y + 2$
b) $-(x + y) = x$

3 REFLEXIONA. Escribe dos ecuaciones lineales distintas que tengan por solución $x = -1$ e $y = 2$.

Para cada valor que demos a una incógnita, obtenemos un único valor para la otra.

Dado que podemos dar infinitos valores a una de las incógnitas, las ecuaciones lineales con dos incógnitas tienen infinitas soluciones.

SABER HACER

Calcular soluciones de una ecuación lineal

Encuentra una solución para cada una de estas ecuaciones lineales.

a) $3x + 2y = 8$ **b)** $y = 4x + 5$

Pasos a seguir

1. Damos un valor cualquiera a una de las dos incógnitas y lo sustituimos en la ecuación.

a) Damos a x el valor 1.

$3x + 2y = 8 \xrightarrow{x=1} 3 \cdot 1 + 2y = 8$
$\rightarrow 3 + 2y = 8$

b) Damos a y el valor -1.

$y = 4x + 5 \xrightarrow{y=-1} -1 = 4x + 5$

2. Despejamos la otra incógnita para hallar su valor numérico. El valor de las dos incógnitas será una solución de la ecuación.

a) $3 + 2y = 8 \rightarrow 2y = 8 - 3$
$\rightarrow 2y = 5 \rightarrow y = \frac{5}{2}$

El par $x = 1$, $y = \frac{5}{2}$ es solución de la ecuación $3x + 2y = 8$.

b) $-1 = 4x + 5 \rightarrow -1 - 5 = 4x$
$\rightarrow -6 = 4x \rightarrow x = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

El par $x = -\frac{3}{2}$, $y = -1$ es solución de la ecuación $y = 4x + 5$.

3. Comprobamos que la solución está bien calculada sustituyendo los valores de las incógnitas en la ecuación. Debe cumplirse la igualdad.

a) $3x + 2y = 8 \xrightarrow{x=1,\, y=\frac{5}{2}} 3 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{5}{2} = 8 \rightarrow 3 + 5 = 8 \rightarrow$ Es solución.

b) $y = 4x + 5 \xrightarrow{x=-\frac{3}{2},\, y=-1} -1 = 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 5 \rightarrow -1 = -6 + 5$
$\rightarrow$ Es solución.

ACTIVIDADES

4 Encuentra una solución para cada ecuación de manera que $x = 1$.

a) $x + y = 5$
b) $2x + y = 7$
c) $4x + 9y = 13$
d) $x = y + 9$
e) $5x = 3y + 8$
f) $9x - 2 = 5y + 2$

5 Halla una solución para cada ecuación de manera que $y = -3$.

a) $x + y = 5$
b) $2x + y = 7$
c) $x = y + 6$
d) $5x = 6y + 8$

6 Calcula una solución para cada ecuación.

a) $2x + 3y = 7$
b) $x + 5y = -1$
c) $-3x + 2y = 0$
d) $4x = -y + 6$
e) $-5x = 2y - 9$
f) $-x + 5 = 3y + 4$

7 Obtén tres soluciones para cada ecuación.

a) $5x - 6y = -8$
b) $2x + 3y = 11$
c) $7y + 2x = 12$

8 Encuentra cuatro soluciones para la ecuación $x + 2y = 8$ y represéntalas en unos ejes cartesianos. ¿Qué observas? ¿Ocurre lo mismo para cualquier ecuación?

9 Escribe una ecuación lineal con dos incógnitas y calcula dos soluciones. Después, escribe otra ecuación equivalente a ella multiplicándola o dividiéndola por un número distinto de cero. Las soluciones de la primera ecuación ¿son soluciones también de la nueva ecuación?

2 Sistemas de ecuaciones lineales

En un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right\}$$

- A *x* e *y* se les llama incógnitas o variables.
- A *a* y *a'*, coeficientes de *x*.
- A *b* y *b'*, coeficientes de *y*.

Dos ecuaciones lineales de las cuales se busca una solución común forman un **sistema de ecuaciones lineales**.

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right\}$$

EJEMPLO

3. Averigua si son sistemas de ecuaciones lineales.

a) $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 4 \\ x - 5y = 1 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sistema de ecuaciones lineales.

b) $\left.\begin{array}{r} 3x + y^2 = -3 \\ 2x + 7y = 9 \end{array}\right\} \rightarrow$ No es un sistema de ecuaciones lineales, porque la primera ecuación es de segundo grado.

Una **solución** de un sistema de ecuaciones lineales es un par de números que hace ciertas las dos ecuaciones del sistema a la vez.

EJEMPLO

4. Indica si estos valores son solución del sistema $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 7 \\ 3x - y = 7 \end{array}\right\}$.

a) $x = 1, y = 3$

$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 7 \\ 3x - y = 7 \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 1,\, y = 3} \left.\begin{array}{r} 1 + 2\cdot 3 = 7 \\ 3\cdot 1 - 3 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow$ No es solución. La segunda ecuación no se cumple.

b) $x = 3, y = 2$

$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 7 \\ 3x - y = 7 \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 3,\, y = 2} \left.\begin{array}{r} 3 + 2\cdot 2 = 7 \\ 3\cdot 3 - 2 = 7 \end{array}\right\} \rightarrow$ Es solución.

c) $x = 0, y = -7$

$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 7 \\ 3x - y = 7 \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 0,\, y = -7} \left.\begin{array}{r} 0 + 2\cdot(-7) \neq 7 \\ 3\cdot 0 - (-7) = 7 \end{array}\right\} \rightarrow$ No es solución. No se cumple la primera ecuación.

RESUELVE EL RETO

¿Qué valores han de tomar *a* y *b* para que la solución de este sistema de ecuaciones lineales sea $x = 1$ e $y = -2$?

$$\begin{cases} -ax + 2y = -7 \\ 5x + by = -3 \end{cases}$$

ACTIVIDADES

10 PRACTICA. Determina si son sistemas lineales.

a) $\left.\begin{array}{r} -x - y^3 = 2 \\ 4x + y = 5 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} -5x = 2y - 2 \\ 3x + 5y = 8 \end{array}\right\}$

11 PRACTICA. Comprueba si $x = 2, y = -3$ es solución de estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 13 \\ -x + y = 5 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} -5x = 3y - 1 \\ 2x + 3y = -5 \end{array}\right\}$

12 APLICA. Si en el sistema $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 2 \\ 4x + 3y = -3 \end{array}\right\}$ la incógnita *x* toma el valor 0, ¿qué valor tendrá que tomar *y* para que ambos formen la solución?

13 REFLEXIONA. Dada la ecuación $8x + 2y = 20$, comprueba que una de sus soluciones es $x = 2$, $y = 2$, y escribe otra ecuación distinta que forme un sistema de ecuaciones lineales con esa solución.

3 Resolución de sistemas de ecuaciones

Resolver un sistema de ecuaciones lineales es encontrar su solución.

EJEMPLO

5. Resuelve el siguiente sistema: $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x &= -2y \end{aligned}\right\}$.

Para resolver este sistema hay que encontrar los pares de valores que verifiquen las dos ecuaciones.

Una forma consiste en construir una tabla de valores para cada una de las ecuaciones.

- En la primera ecuación despejamos y. Después, damos valores a x y hallamos los valores de y correspondientes.

$2x + y = 3 \rightarrow y = 3 - 2x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	9	7	5	3	1	-1	-3	...

Recuerda que las ecuaciones lineales con dos incógnitas tienen infinitas soluciones.

- En la segunda ecuación ya está despejada x; por tanto, damos valores a y y hallamos los valores de x correspondientes.

$x = -2y$

x	6	4	2	0	-2	-4	-6	...
y	-3	-2	-1	0	1	2	3	...

El único par de valores que se repite en las dos tablas es $x = 2, y = -1$.

Decimos que el par de valores $x = 2, y = -1$ es solución del sistema, ya que verifica las dos ecuaciones a la vez.

Resolver sistemas mediante tablas puede resultar complicado en algunas ocasiones. Por eso, vamos a aprender otros métodos de resolución de sistemas que te serán mucho más útiles.

ACTIVIDADES

14 PRACTICA. Si en el sistema $\left.\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + y &= 5 \end{aligned}\right\}$, x toma estos valores, ¿qué valores tendrá y en cada ecuación? ¿Cuál es la solución del sistema?

a) $x = 1$ b) $x = 3$ c) $x = 2$ d) $x = -2$

15 PRACTICA. Si en el sistema $\left.\begin{aligned} x + 3y &= 0 \\ 3x - 2y &= 11 \end{aligned}\right\}$, la incógnita y toma estos valores, ¿qué valores tendrá x en cada ecuación? ¿Cuál es la solución del sistema?

a) $y = 1$ c) $y = -1$

b) $y = -2$ d) $y = 2$

16 APLICA. Resuelve estos sistemas mediante tablas.

a) $\left.\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned} x + 2y &= -2 \\ 3x - y &= -6 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 3x - y &= 4 \end{aligned}\right\}$ d) $\left.\begin{aligned} x - y &= 4 \\ 2x + y &= 2 \end{aligned}\right\}$

17 REFLEXIONA. La solución del sistema $\left.\begin{aligned} x + y &= -2 \\ 2x - y &= 5 \end{aligned}\right\}$ es $x = 1, y = -3$. Escribe otros dos sistemas que tengan la misma solución y que compartan con él una de las ecuaciones. ¿Puedes escribir un sistema con esa solución que tenga las dos ecuaciones distintas a este sistema?

4 Métodos de resolución de sistemas

RESUELVE EL RETO

Un sistema de ecuaciones, ¿tiene siempre solución? ¿Puede tener más de una solución?

Para resolver sistemas de ecuaciones se utilizan distintas técnicas que se llaman métodos de resolución.

4.1. Método de sustitución

Para resolver un sistema por el **método de sustitución**, se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y se sustituye su expresión en la otra.

EJEMPLO

6. Resuelve este sistema por el método de sustitución $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ x - 3y = -1 \end{array}\right\}$.

1.º Despejamos una incógnita en una de las ecuaciones. Es conveniente despejar una incógnita cuyo coeficiente sea 1 o -1, para evitar trabajar con denominadores.

En este caso, despejamos y de la primera ecuación.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ x - 3y = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 5 - 2x \\ x - 3y = -1 \end{array}\right\}$$

2.º Sustituimos la expresión obtenida en la otra ecuación.

$$x - 3y = -1 \xrightarrow{y = 5 - 2x} x - 3(5 - 2x) = -1$$

3.º Resolvemos la ecuación con una incógnita que resulta.

$$x - 3(5 - 2x) = -1 \rightarrow x - 15 + 6x = -1 \rightarrow x + 6x = -1 + 15 \rightarrow$$
$$\rightarrow 7x = 14 \rightarrow x = \frac{14}{7} = 2$$

4.º Calculamos el valor de la otra incógnita, sustituyendo el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones.

$$2x + y = 5 \xrightarrow{x=2} 2 \cdot 2 + y = 5 \rightarrow 4 + y = 5 \rightarrow y = 1$$

El sistema tiene como solución $x = 2, y = 1$.

5.º Comprobamos que la solución obtenida es solución del sistema.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ x - 3y = -1 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=2, y=1} \left.\begin{array}{r} 2 \cdot 2 + 1 = 5 \\ 2 - 3 \cdot 1 = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 5 = 5 \\ -1 = -1 \end{array}\right\}$$

Son igualdades; por tanto, $x = 2, y = 1$ es la solución del sistema.

El método de sustitución es útil si alguna de las incógnitas tiene como coeficientes 1 o –1.

ACTIVIDADES

18 PRACTICA. Resuelve por sustitución.

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x + y = 9 \\ -4x + 5y = 0 \end{array}\right\}$

19 APLICA. Resuelve por sustitución.

a) $\left.\begin{array}{r} 5 + 3y = x \\ x = 2y + 1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 4y = 3x + 2 \\ 10 - 4x = y \end{array}\right\}$

20 APLICA. Reduce y resuelve por sustitución.

$\left.\begin{array}{r} 5x + 2y = 4x - 3y + 6 \\ 4x - 3y = 1 \end{array}\right\}$

21 REFLEXIONA. Resuelve por sustitución.

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x + y = 7 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 8 \\ 2x + 4y = 16 \end{array}\right\}$

4.2. Método de igualación

Para resolver un sistema por el **método de igualación**, se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones y después se igualan las expresiones obtenidas.

EJEMPLO

7. Resuelve este sistema por el método de igualación.

$$\left.\begin{array}{r} x - y = -1 \\ 3x - 2y = 1 \end{array}\right\}$$

1.º Despejamos una de las incógnitas en ambas ecuaciones. Es conveniente elegir la incógnita que al despejar nos dé las expresiones más sencillas. En este caso, despejamos x.

$$\left.\begin{array}{r} x - y = -1 \\ 3x - 2y = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \ x = -1 + y \\ \rightarrow \ x = \dfrac{1+2y}{3} \end{array}$$

2.º Igualamos las dos expresiones obtenidas.

$$-1 + y = \frac{1+2y}{3}$$

3.º Resolvemos la ecuación de primer grado que resulta.

$$3(-1 + y) = 1 + 2y \rightarrow -3 + 3y = 1 + 2y$$
$$\rightarrow 3y - 2y = 1 + 3 \rightarrow y = 4$$

4.º Calculamos el valor de la otra incógnita, sustituyendo el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones.

Hallamos x sustituyendo y por su valor, 4, en la primera ecuación.

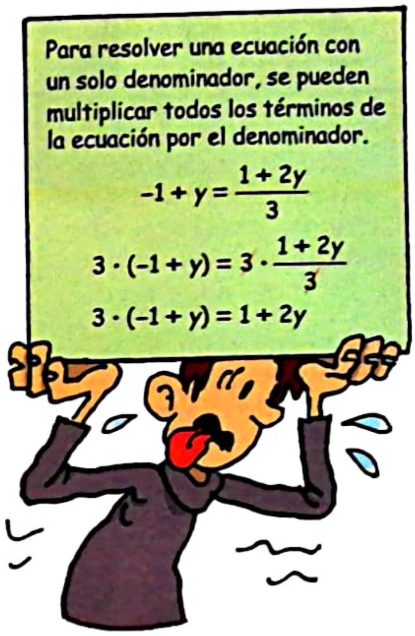
$$x = -1 + y \xrightarrow{y=4} x = -1 + 4 = 3$$

El sistema tiene como solución $x = 3, y = 4$.

5.º Comprobamos que la solución obtenida es solución del sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x - y = -1 \\ 3x - 2y = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=3,\,y=4} \left.\begin{array}{r} 3 - 4 = -1 \\ 3\cdot 3 - 2\cdot 4 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -1 = -1 \\ 1 = 1 \end{array}\right\}$$

Son igualdades; por tanto, $x = 3, y = 4$ es la solución del sistema.



ACTIVIDADES

22 PRACTICA. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación.

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 9 \\ -4x + 5y = 0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -x - y = -6 \\ 2x - 3y = -3 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 5x + 4y = 1 \\ x - 6y = 7 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 13 \\ 3x - 2y = 0 \end{array}\right\}$

23 APLICA. Reduce los términos semejantes y resuelve por igualación.

$$\left.\begin{array}{r} 6x + 2y = 5x - 4y + 8 \\ 3x - 4y = 2 \end{array}\right\}$$

24 REFLEXIONA. Resuelve estos sistemas por el método de igualación. ¿Qué observas?

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = 15 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 8 \end{array}\right\}$

4.3. Método de reducción

Para resolver un sistema por el **método de reducción**, se busca otro sistema equivalente en el que los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales u opuestos. Luego se suman o se restan las ecuaciones.

Para restar dos ecuaciones, se suma a la primera ecuación la opuesta de la segunda, que se obtiene cambiando de signo todos sus términos.

$$-5x + 3y = 9$$
$$\downarrow \text{Opuesta}$$
$$5x - 3y = -9$$

EJEMPLO

8. Resuelve este sistema por el método de reducción

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 11 \\ 2x - 3y = -8 \end{array}\right\}$$

1.º Igualamos los coeficientes de una de las incógnitas multiplicando las ecuaciones por los números adecuados.

En este sistema, si multiplicamos la primera ecuación por 3, los coeficientes de y serán opuestos.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 11 \\ 2x - 3y = -8 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 3} \left.\begin{array}{r} 3x + 3y = 33 \\ 2x - 3y = -8 \end{array}\right\}$$

2.º Sumamos o restamos las ecuaciones, según los coeficientes tengan distinto o igual signo, para eliminar una incógnita.

En este caso, como los coeficientes de y tienen distinto signo, se suman las ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 3y = 33 \\ 2x - 3y = -8 \end{array}\right\} \rightarrow + \left.\begin{array}{r} 3x + \cancel{3y} = 33 \\ 2x - \cancel{3y} = -8 \\ \hline 5x \quad\quad = 25 \end{array}\right.$$

3.º Resolvemos la ecuación de primer grado que resulta.

$$5x = 25 \rightarrow x = \frac{25}{5} = 5$$

4.º Calculamos el valor de la otra incógnita, sustituyendo el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones.

$$x + y = 11 \xrightarrow{x=5} 5 + y = 11 \rightarrow y = 11 - 5 = 6$$

El sistema tiene como solución $x = 5, y = 6$.

5.º Comprobamos que la solución obtenida es correcta.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 11 \\ 2x - 3y = -8 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=5,\, y=6} \left.\begin{array}{r} 5 + 6 = 11 \\ 2 \cdot 5 - 3 \cdot 6 = -8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 11 = 11 \\ -8 = -8 \end{array}\right\}$$

Son igualdades, por tanto $x = 5, y = 6$ es la solución del sistema.

ACTIVIDADES

25 PRACTICA. Resuelve estos sistemas multiplicando por el número adecuado sus ecuaciones para aplicar el método de reducción.

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 7 \\ 2x + 5y = 26 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -x - 3y = -1 \\ 5x - 4y = 5 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 5x + y = 11 \\ -x - 7y = -9 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 5 \\ -7x + 12y = -18 \end{array}\right\}$

26 APLICA. Reduce y resuelve por reducción.

$$\left.\begin{array}{r} 6y + 2y = 5x + 4y \\ 2x - 4y = x + 3y - 7 \end{array}\right\}$$

27 REFLEXIONA. Resuelve estos sistemas por el método de reducción. ¿Qué observas?

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ -6x - 3y = -15 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -x + 2y = 5 \\ 5x - 10y = 10 \end{array}\right\}$

SABER HACER

Cualquier sistema se puede resolver por cualquiera de los métodos que hemos visto (sustitución, igualación o reducción).

La elección del método depende del tipo de ecuaciones que lo compongan.

Resolver un sistema de ecuaciones lineales

Resuelve este sistema por el método más adecuado.

$$\left.\begin{array}{r}5x + 6y - 9 = 4y + 2x - 10\\ 5x - 2y - 10 = 3y + 9 - 4x\end{array}\right\}$$

Pasos a seguir

1. Expresamos las dos ecuaciones en su forma general $ax + by = c$.

$$\left.\begin{array}{r}5x + 6y - 9 = 4y + 2x - 10\\ 5x - 2y - 10 = 3y + 9 - 4x\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}5x - 2x + 6y - 4y = -10 + 9\\ 5x + 4x - 2y - 3y = 9 + 10\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r}3x + 2y = -1\\ 9x - 5y = 19\end{array}\right\}$$

2. Elegimos el método adecuado:
   - **Sustitución.** Si alguna de las incógnitas tiene como coeficiente 1 o −1.
   - **Reducción.** Si los coeficientes son iguales o uno es múltiplo de otro.
   - **Igualación.** En el resto de casos.

En este caso, usaremos reducción, porque los coeficientes de x son múltiplo uno del otro.

Si multiplicamos la primera ecuación por 3, los coeficientes de x de las dos ecuaciones serán iguales.

$$\left.\begin{array}{r}3x + 2y = -1\\ 9x - 5y = 19\end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 3} \left.\begin{array}{r}9x + 6y = -3\\ 9x - 5y = 19\end{array}\right\}$$

Como los coeficientes tienen el mismo signo, restamos las ecuaciones.

$$-\left.\begin{array}{r}\cancel{9x} + 6y = -3\\ \cancel{9x} - 5y = 19\end{array}\right\}$$

$$11y = -22 \rightarrow y = \frac{-22}{11} = -2$$

Calculamos el valor de x sustituyendo en la segunda ecuación.

$$9x - 5y = 19 \xrightarrow{y=-2} 9x - 5\cdot(-2) = 19$$

$$\rightarrow 9x + 10 = 19 \rightarrow 9x = 19 - 10 = 9 \rightarrow x = 1$$

La solución es $x = 1, y = -2$.

ACTIVIDADES

28 Resuelve los siguientes sistemas por el método que creas más adecuado.

a) $\left.\begin{array}{r}2x + 3y = 5\\ 4x + 5y = 9\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}x = 4 + 5y\\ x - 9y = -4\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}4x + y = 11\\ -5x + y = -7\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}3x - y = 2x + 8 + 2y\\ x - 2y = -1 + y\end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r}5x + 2y + 5 = y + 2x + 8\\ -4x - y + 9 = x - 2y - 2\end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r}3x + y - 8 = 6 - y - 2x\\ 6x - 2y - 5 = -x + 2y + 1\end{array}\right\}$

29 Resuelve los siguientes sistemas por el método que consideres más adecuado.

a) $\left.\begin{array}{r}x = 9 - y\\ y = x - 1\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}2x + y = 7\\ 5x - y = 7\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}x = 2y - 3\\ 4y - 7 = x\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}4x + 5y = 9\\ x - 7y = -6\end{array}\right\}$

30 Escribe un sistema de ecuaciones que sea conveniente resolver por sustitución y cuya solución sea $x = 2, y = -3$.

31 Escribe un sistema de ecuaciones que sea fácil para resolverlo por reducción y cuya solución sea $x = 5, y = 0$.

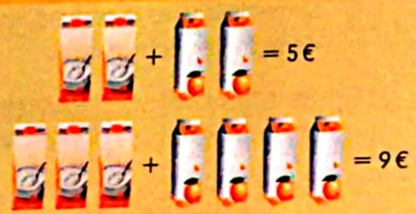
32 Escribe un sistema de ecuaciones apropiado para resolver por sustitución y otro, por reducción.

5 Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

Para resolver un problema mediante un sistema de ecuaciones, trac cimos al lenguaje algebraico el enunciado del problema y, después, hal mos la solución mediante la resolución del sistema.

EJEMPLO

9. Marta compró 2 paquetes de azúcar y 2 litros de zumo, pagando por ellos 5 €. Luis compró 3 paquetes de azúcar y 4 litros de zumo, pagando por ellos 9 €. ¿Cuánto costaba un paquete de azúcar? ¿Y un litro de zumo?

Lo que sabemos	Lo que no sabemos
	Precio de un paquete de azúcar. Precio de un litro de zumo.

Las incógnitas son: $x \rightarrow$ precio de un paquete de azúcar
$y \rightarrow$ precio de un litro de zumo

Si expresamos algebraicamente las condiciones del enunciado:

2 paquetes y 2 litros cuestan 5 €.

$$2x \quad + \quad 2y \quad = \quad 5$$

3 paquetes y 4 litros cuestan 9 €.

$$3x \quad + \quad 4y \quad = \quad 9$$

Para hallar la solución del problema hay que resolver el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 9 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-2)} \left.\begin{array}{r} -4x - 4y = -10 \\ 3x + 4y = 9 \end{array}\right\}$$

$$-x \qquad = -1 \quad \rightarrow x = 1$$

$$3x + 4y = 9 \xrightarrow{x=1} 3 \cdot 1 + 4y = 9 \rightarrow 4y = 9 - 3 = 6 \rightarrow y = \frac{6}{4} = 1{,}5$$

La solución del sistema es $x = 1$, $y = 1{,}5$. Por tanto, un paquete de azúcar costaba 1 € y un litro de zumo 1,50 €.

RESUELVE EL RETO

Un número de dos cifras es mayor de 30. Si sumo sus dos cifras, obtengo el doble que si las resto.
¿Qué número es?

ACTIVIDADES

33 **PRACTICA.** Dos libros y un cuaderno cuestan 18 €. Tres libros y dos cuadernos cuestan 28 €.

a) Expresa el problema usando un sistema de ecuaciones.

b) ¿Qué método usas para resolverlo?

c) ¿Cuál es el precio de un libro? ¿Y de un cuaderno?

34 **APLICA.** La suma de las edades de dos amigos es 45. La edad de uno menos 6 es el doble de la edad del otro. ¿Cuáles son sus edades?

35 **REFLEXIONA.** Al restar 3 a un número obtengo el triple de otro; sin embargo, si resto 4 obtengo solo el doble del otro. ¿Qué números son?

SABER HACER

Es importante comprobar que la solución del sistema tiene sentido en la situación real que estamos resolviendo.

Resolver problemas utilizando sistemas de ecuaciones

María ha vendido 500 kg de hortalizas entre patatas y cebollas.
Cada kilo de patatas lo ha vendido a 1,50 € y el de cebollas a 2 €.
Ha obtenido 850 € por la venta. ¿Cuántos kilos de cada hortaliza ha vendido?

Pasos a seguir

1. Identificamos las incógnitas.

Lo que sabemos	Lo que no sabemos
Ha vendido 500 kg 1 kg patatas: 1,50 €. 1 kg cebollas: 2 €. Recaudación total obtenida: 850 €.	Los kilos de patatas vendidos. Los kilos de cebollas vendidos.

Número de kilos de patatas $\longrightarrow x$
Número de kilos de cebollas $\rightarrow y$

2. Planteamos el sistema.

Ha vendido 500 kg de hortalizas $\rightarrow x + y = 500$

Cada kilo de patatas cuesta 1,50 € $\rightarrow$ Recaudación por patatas $= 1{,}50x$

Cada kilo de cebollas cuesta 2 € $\rightarrow$ Recaudación por cebollas $= 2y$

La recaudación total ha sido 850 €.

Recaudación por patatas + Recaudación por cebollas = 850

$$1{,}50x \quad + \quad 2y \quad = 850$$

El sistema obtenido es $\left.\begin{aligned} x + y &= 500 \\ 1{,}5x + 2y &= 850 \end{aligned}\right\}$

3. Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 500 \\ 1{,}5x + 2y &= 850 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\cdot(-2)} \left.\begin{aligned} -2x - 2y &= -1000 \\ 1{,}5x + 2y &= 850 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} -2x - \cancel{2y} &= -1000 \\ 1{,}5x + \cancel{2y} &= 850 \\ \hline -0{,}5x \quad &= -150 \rightarrow x = 300 \end{aligned}$$

$$x + y = 500 \xrightarrow{x = 300} 300 + y = 500 \rightarrow y = 500 - 300 = 200$$

4. Comprobamos e interpretamos la solución.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 500 \\ 1{,}5x + 2y &= 850 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x=300,\, y=200} \left.\begin{aligned} 300 + 200 &= 500 \\ 1{,}5 \cdot 300 + 2 \cdot 200 &= 850 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 500 &= 500 \\ 850 &= 850 \end{aligned}\right\}$$

La solución es válida. Ha vendido 300 kg de patatas y 200 kg de cebollas.

ACTIVIDADES

36 Marta tiene 15 billetes en su cartera. Tiene 150 € en total y solo cuenta con billetes de 5 € y de 20 €. ¿Cuántos billetes de cada tipo tiene Marta en su cartera?

37 Un hotel tiene 23 habitaciones entre dobles y triples. Ahora están todas las habitaciones completas y hay 49 personas alojadas. ¿Cuántas habitaciones hay de cada tipo?

38 Juan respondió 50 preguntas en una prueba. Por cada pregunta acertada obtuvo 2 puntos y por cada fallo perdió 1 punto. En total obtuvo 91 puntos. ¿Cuántas preguntas acertó?

39 Mónica ha metido 15 canastas entre triples y tiros libres. Ha obtenido 43 puntos en total. ¿Cuántas canastas de 3 puntos ha obtenido? ¿Y canastas de 1 punto?