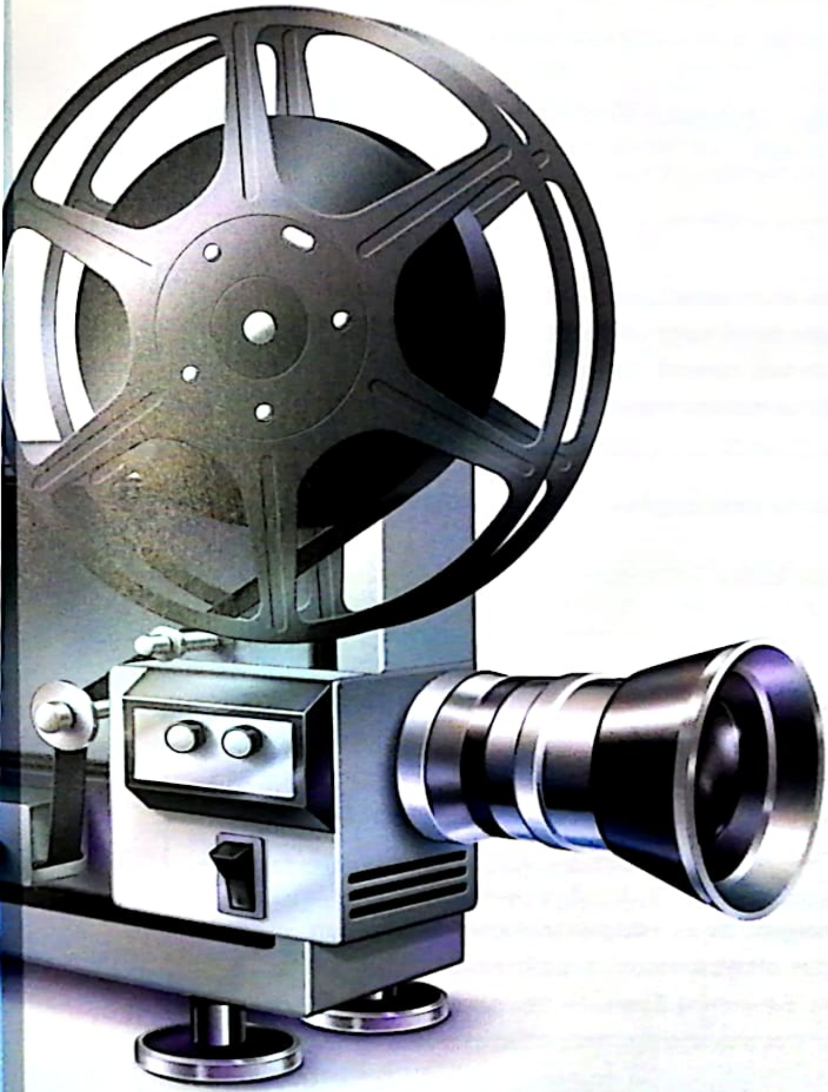
# Expresiones algebraicas

# 5



**SABER**

- Expresiones algebraicas
- Monomios. Operaciones
- Polinomios. Operaciones
- Igualdades notables

**SABER HACER**

- Resolver operaciones combinadas con monomios
- Extraer factor común en un polinomio
- Expresar un polinomio como cuadrado de una suma o una diferencia
- Expresar un polinomio como producto de una suma por una diferencia

**? VIDA COTIDIANA**

**El cine**

El cine lleva más de un siglo contando historias que nos hacen reír, llorar, emocionarnos o simplemente nos entretienen. Pero esas imágenes que vemos no son más que muchísimas fotos juntas, que al pasar a una cierta velocidad por un proyector, nos dan la sensación de movimiento.

- Si una pantalla de cine tiene $x$ metros de ancho e $y$ metros de altura, ¿qué perímetro tiene?

**1901**
Se elaboran las primeras películas de cine mudo.

**1927**
Se estrena *El cantante de jazz*, la primera película con sonido incorporado.

**1935**
Se rueda la primera película en color.


**2000**
Empiezan a proyectarse las primeras películas en formato digital.

# 1 Expresiones algebraicas

El lenguaje que utiliza letras y números unidos por los signos de las operaciones aritméticas se denomina lenguaje algebraico.

Una **expresión algebraica** es un conjunto de números y letras unidos por los signos de las operaciones aritméticas.

El valor numérico de una expresión algebraica varía en función de los valores que tomen las letras o variables.

EJEMPLO

1 Expresa estos enunciados como expresiones algebraicas.

a) El perímetro de un campo de fútbol $\rightarrow 2 \cdot a + 2 \cdot b$

b) La suma de dos números consecutivos $\rightarrow x + (x + 1)$

c) El triple de un número menos la mitad de otro $\rightarrow 3 \cdot x - \frac{y}{2}$

## Valor numérico de una expresión algebraica

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el número que resulta al sustituir las letras por unos números determinados y realizar las operaciones indicadas.

EJEMPLO

2 Halla el valor numérico de estas expresiones algebraicas.

a) $x^2 + 1$ para $x = 2$ $\qquad x^2 + 1 \xrightarrow{x=2} 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

b) $2a - 3b$ cuando $a = 2$ y $b = -1$.

$2a - 3b \xrightarrow{a=2,\ b=-1} 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 4 + 3 = 7$

c) Halla el perímetro de un triángulo equilátero de lado 5 cm.

Como los tres lados son iguales, el perímetro es:

Perímetro $= l + l + l = 3l \xrightarrow{l=5}$ Perímetro $= 3 \cdot 5 = 15$ cm

ACTIVIDADES

**1** PRACTICA. Expresa en lenguaje algebraico.

a) El triple de un número menos 5.

b) La mitad de un número más su triple.

c) La edad de María hace 3 años.

d) El precio de $x$ kg de peras a 1,50 €/kg.

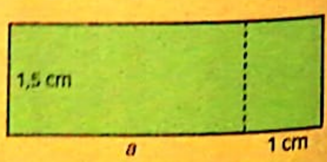
**2** PRACTICA. Halla el valor numérico de $-3 \cdot a^2 + 1$.

a) Si $a = 0$ $\qquad$ b) Si $a = -2$ $\qquad$ c) Si $a = 3$

**3** APLICA. Da la expresión algebraica del perímetro de un rectángulo. Halla su valor si los lados son:

a) 3 cm y 4 cm $\qquad$ b) 1,5 cm y 2 cm

**4** REFLEXIONA. Expresa el área de este rectángulo en función del valor de $a$.



# 2 Monomios

Un **monomio** es una expresión algebraica formada por el producto de un número y una o varias letras, denominadas **variables**.

El número se denomina **coeficiente**, y las variables con sus exponentes son la **parte literal**.

El **grado** de un monomio es la suma de los exponentes de las variables que lo forman.

### SE ESCRIBE ASÍ

- El signo del producto entre números y letras no se escribe.

  $5 \cdot x^2 \cdot y^2 = 5x^2y^2$
- El exponente 1 no se escribe.

  $ab = a^1b^1$
- Si un monomio está formado solo por variables, su coeficiente es 1.

  $1 \cdot x^3 = x^3 \rightarrow$ coeficiente 1

### EJEMPLOS

3. Escribe cuatro monomios distintos. $2x \quad -7ab \quad \frac{3}{2}x^2y^3 \quad -4m^3n$

4. Indica los elementos y el grado de los monomios: $12a^2$ y $-24xy^3z^2$.

$$\underbrace{12}_{\text{coeficiente}}\underbrace{a^2}_{\text{parte literal}} \rightarrow \text{Grado} = 2 \qquad \underbrace{-24}_{\text{coeficiente}}\underbrace{xy^3z^2}_{\text{parte literal}} \rightarrow \text{Grado} = 1 + 3 + 2 = 6$$

- Dos monomios son **semejantes** si tienen la misma parte literal.
- Dos monomios son **opuestos** si son semejantes y sus coeficientes son números opuestos.

### EJEMPLOS

5. Determina si estos monomios son semejantes.

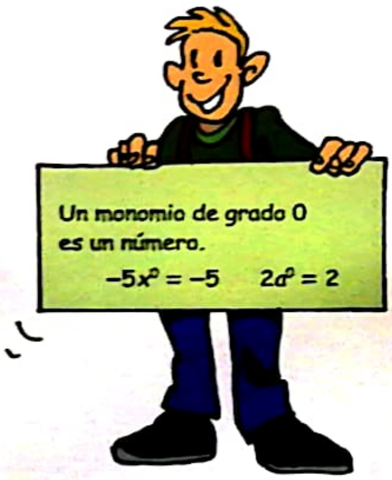
   a) $-5x^2y$ y $x^2y$ → Lo son, porque su parte literal ($x^2y$) es la misma.

   b) $3a^2$ y $3a$ → No lo son, porque sus partes literales son distintas.

6. Indica si los monomios siguientes son opuestos.

   a) $-7x^2y^3$ y $7x^2y^3$ → Lo son, porque sus partes literales son iguales y sus coeficientes opuestos, $Op(-7) = 7$.

   b) $3ab^2$ y $\frac{1}{3}ab^2$ → No lo son, aunque sus partes literales son iguales sus coeficientes, 3 y $\frac{1}{3}$, no son opuestos.




## ACTIVIDADES

**5** PRACTICA. Indica el coeficiente, la parte literal y el grado de estos monomios.

| | | |
|---|---|---|
| a) $5x^2yz$ | d) $2xy^2$ | g) $6n^4$ |
| b) $-3ab^2c^3$ | e) $-3xyz$ | h) $-2$ |
| c) $-5m^4$ | f) $-5a^2bc^3$ | i) $abc$ |

**6** PRACTICA. Averigua qué monomios de la actividad anterior son semejantes.

**7** APLICA. Indica si estas parejas de monomios son semejantes y si no lo son escribe sus opuestos.

| | |
|---|---|
| a) $4x^2$ y $3x$ | c) $2x$ y $-5z$ |
| b) $3ab^2$ y $-2ab^2$ | d) $2x^2y$ y $-2xy$ |

**8** REFLEXIONA. Sin calcular, indica cuál es el grado de un monomio semejante a $-3xy^2$ y el grado de su monomio opuesto.

NO OLVIDES QUE...

Producto de potencias:

$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

Cociente de potencias:

$x^m : x^n = x^{m-n}$

Potencias de exponente 0 y 1:

$x^1 = x$  $x^0 = 1$

# 3 Operaciones con monomios

## 3.1. Suma y resta de monomios

Para sumar **dos monomios semejantes**, se suman los coeficientes y se deja la misma parte literal.

Para restar **dos monomios semejantes**, se restan los coeficientes y se deja la misma parte literal.

Si los monomios no son semejantes, no se pueden sumar ni restar y se deja indicada la suma o la resta.

**EJEMPLO**

7. Calcula la suma y la resta, si se puede, de estos monomios.

a) $-5xy^4$ y $3xy^4$ → Son semejantes.

$-5xy^4 + 3xy^4 = (-5+3)xy^4 = -2xy^4$

$-5xy^4 - 3xy^4 = (-5-3)xy^4 = -8xy^4$

b) $3a^2b$ y $3ab^2$ → No son semejantes, $3a^2b + 3ab^2$ y $3a^2b - 3ab^2$.

## 3.2. Multiplicación y división de monomios

Para **multiplicar monomios**, se multiplican por un lado sus coeficientes y por el otro sus partes literales.

Para **dividir monomios**, se dividen por un lado sus coeficientes y por el otro sus partes literales (si se puede).

**EJEMPLO**

8. Calcula estas operaciones con monomios.

a) $3x^2 \cdot 5x^4 = (3 \cdot 5) \cdot (x^2 \cdot x^4) = 15x^{2+4} = 15x^6$

b) $-2ab^3 \cdot b^2 = (-2 \cdot 1) \cdot (ab^3 \cdot b^2) = -2ab^{3+2} = -2ab^5$

c) $-4a^2b^3 : 3ab = (-4 : 3) \cdot (a^2b^3 : ab) = -\frac{4}{3}a^{2-1}b^{3-1} = -\frac{4}{3}ab^2$

### ACTIVIDADES

**9** PRACTICA. Calcula.

a) $7a^2y - 11a^2y$

b) $2x^2y + 5x^2yz$

c) $4a^2b^3 - 9a^2b^3$

d) $\frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{2}xy^2$

e) $2x^2 \cdot 5x^2$

f) $9x^2 : (-3x)$

g) $-8ab^2 \cdot 5a^2b^3$

h) $5x^2y^2z^2 : 3xy^2$

**10** APLICA. Corrige las igualdades falsas.

a) $2a + 2a = 4a^2$

b) $3x + 2y = 5xy$

c) $8x^2y : 4xy = 2xy$

d) $2a \cdot 3a = 6a^2$

**11** REFLEXIONA. Piensa y escribe dos monomios cuyo producto sea $8a^5b^2$ y su cociente $2ab^2$.

## SABER HACER

### Resolver operaciones combinadas con monomios

**Calcula estas operaciones con monomios siguiendo la jerarquía de las operaciones.**

a) $8x^2 - (5x^4 + x^4) : 2x^2 + 5x^4 \cdot (3x \cdot x)$  b) $10x^7 : (x^3 - 6x^3) + 4x^3 \cdot 5x - (3x^2 \cdot x^2)$

**Pasos a seguir**

1. Resolvemos las operaciones que hay dentro de los paréntesis.

a) $8x^2 - \underbrace{(5x^4 + x^4)}_{6x^4} : 2x^2 + 5x^4 \cdot \underbrace{(3x \cdot x)}_{3x^2} =$

$= 8x^2 - 6x^4 : 2x^2 + 5x^4 \cdot 3x^2 =$

b) $10x^7 : \underbrace{(x^3 - 6x^3)}_{(-5x^3)} + 4x^3 \cdot 5x - \underbrace{(3x^2 \cdot x^2)}_{3x^4}$

$= 10x^7 : (-5x^3) + 4x^3 \cdot 5x - 3x^4$

2. Resolvemos las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.

a) $8x^2 - \underbrace{6x^4 : 2x^2}_{3x^2} + \underbrace{5x^4 \cdot 3x^2}_{15x^6} =$

$= 8x^2 - 3x^2 + 15x^6$

b) $\underbrace{10x^7 : (-5x^3)}_{-2x^4} + \underbrace{4x^3 \cdot 5x}_{20x^4} - 3x^4 =$

$= -2x^4 + 20x^4 - 3x^4$

3. Resolvemos las sumas y las restas de izquierda a derecha.

a) $\underbrace{8x^2 - 3x^2}_{5x^2} + 15x^6 =$

$= 5x^2 + 15x^6$

b) $\underbrace{-2x^4 + 20x^4}_{18x^4} - 3x^4 =$

$= \underbrace{18x^4 - 3x^4}_{15x^4} =$

$= 15x^4$

Recuerda que solo se pueden sumar o restar monomios semejantes.

Si los monomios no son semejantes, dejamos indicada la suma o la resta.

## ACTIVIDADES

**12** Calcula estas operaciones.

a) $3x + 2x - 8x$

b) $3xy - 11x^2y + 4xy + 6x^2y + 7xy$

c) $2x^2 + 3x^2 + 3x^3 - x^2 + x + 1$

d) $3x^2 + 9x^2 + 8x^2 + 3x^3 - 5x^2$

e) $\frac{1}{2}x^3 - 6x + 7x - \frac{2}{3}x^3 - x + \frac{1}{4}x^3$

**13** Calcula.

a) $3x \cdot 2x^2 : 3x$

b) $10x^2y : 5xy \cdot 4y$

c) $2x^2 \cdot 3x^2 \cdot 3x^3 : 9x^2$

d) $3xy^3 : 4xy^2 \cdot \frac{1}{2}x$

e) $8x^2y^2z^2 : 2xy^2z \cdot xyz^2$

f) $5a^5b^2c : a^3b \cdot 2bc^4$

**14** Opera y simplifica.

a) $8x \cdot 2x^2 : 4x + 16x \cdot x^3 : 8x^2$

b) $25x \cdot x^3 : (-5) + 6x^5 : 3x^4 \cdot (-3x^3)$

c) $2x^3 \cdot (10 \cdot 4x^2) - 10x^6 \cdot 6x^4 : 2x$

d) $(4x^2 - 3x^2 + 6x^2) \cdot (4x^4 - 5x^4 + x^4)$

e) $(-5x^4y^2 + 9x^4y^2) : (3x^4y + 2x^4y)$

f) $(6x^3 - 8x^3 + 4x^3) \cdot (y - 4y + 5y)$

**15** Calcula estas operaciones y simplifica.

a) $10x^7 : (x^3 - 6x^3) + 4x^3 \cdot 5x - (3x^2 \cdot x^2)$

b) $8x^4 : (2x^2 + 2x^2 - 5x^2) + 5x^3$

c) $2x^2 \cdot x^3 \cdot 3x^5 : (-6x) + (5x^2 \cdot 2x^7) - 2x^6$

d) $(9yx^2 - 4yx^2) \cdot 6xy + 10x^2y^3 - 4x^3y^2$

e) $(5y^3 - 2y^3) \cdot 3xy^3 + 4xy \cdot y^5$

f) $\frac{1}{2}xy^3 \cdot 6x^2y : \frac{1}{3}xy + x^2y^3 - \frac{1}{2}x^3y^2$

## 4 Polinomios

### SE ESCRIBE ASÍ

Para designar los polinomios utilizamos una letra mayúscula, indicando entre paréntesis las variables que hay en el polinomio.

$$P(x) = 5x^4 + 4x - 7$$
$$Q(m, n) = -4mn^3 - 7m^2 + 3n - 1$$

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma o la resta de dos o más monomios no semejantes.

Cada uno de los monomios se llama **término**, y si no tiene parte literal, **término independiente**. El mayor de los grados de todos sus términos se denomina **grado** del polinomio.

**EJEMPLO**

9. Determina los elementos y el grado de este polinomio.

$$\underbrace{5y^3 - 3xy^4 + y^3 - 7y + 2x + 4}_{\text{Términos}} \rightarrow \text{Término independiente: } +4$$

Término de mayor grado: $-3xy^4$ → Grado del polinomio: $1 + 4 = 5$

Antes de trabajar con un polinomio, se suman o se restan sus monomios semejantes.

$$4xy^2 - 3y + 2x - 6xy^2 =$$
$$= -2xy^2 - 3y + 2x$$

El polinomio opuesto de $P(x)$, que designamos como $-P(x)$, se obtiene cambiando de signo los coeficientes de todos los términos de $P(x)$.

$$P(x) = -3x^5 + 8x^3 + 2x - 9 \xrightarrow{\text{Opuesto}} -P(x) = 3x^5 - 8x^3 - 2x + 9$$

### Valor numérico de un polinomio

El **valor numérico** de un polinomio $P(x)$ para $x = a$, $P(a)$, se obtiene sustituyendo la variable $x$ por el valor $a$ y operando.

**EJEMPLO**

10. Halla el valor numérico del polinomio $P(x) = 3x^5 - 2x + 1$, para $x = 2$.

$$P(x) = 3x^5 - 2x + 1 \xrightarrow{x=2} P(2) = 3 \cdot 2^5 - 2 \cdot 2 + 1 = 93$$

### ACTIVIDADES

**16** PRACTICA. Reduce, si se puede, los términos semejantes en estos polinomios e indica sus elementos y el grado.

a) $P(x) = 7x^3 - 2x + 4x^3 - 5x^2 - x + 7$

b) $Q(x) = 5x^4 - x + 2 - 7x^4 - x^2 + 8x^2 - 2$

c) $R(x) = 5x^4 - 3x + 7x^4 - x^4 + 8x^4 - 3$

d) $P(a, b) = 8a^3b^2 + 5a^2b^3$

**17** PRACTICA. Halla el opuesto de cada polinomio de la actividad anterior.

**18** APLICA. Determina si son ciertas o falsas estas afirmaciones sobre $P(x, y) = 7xy^2 + 2x^3y^2 - 9x$.

a) El término independiente es 9.

b) Es de grado 6.

c) Tiene dos variables.

d) $-P(x, y) = -7x^2y - 2x^3y^2 + 9x$

**19** REFLEXIONA. Escribe un polinomio de una variable, de grado 3, con 3 términos y con término independiente $-3$.

# 5 Operaciones con polinomios

## 5.1. Suma y resta de polinomios

Para **sumar polinomios**, se suman los monomios semejantes y se deja indicada la suma de los monomios no semejantes.

Para **restar polinomios**, se suma al primer polinomio el polinomio opuesto del segundo.

EJEMPLO

11. Dados los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ siguientes, calcula:

$P(x) = -x^5 + 4x^3 - 5x + 1 \qquad Q(x) = -2x^4 - 3x^3 + x^2 + 5x - 7$

a) $P(x) + Q(x)$

$$\begin{array}{rrrrrrr} & -x^5 & & +4x^3 & & -5x & +1 \\ + & & -2x^4 & -3x^3 & +x^2 & +5x & -7 \\ \hline & -x^5 & -2x^4 & +x^3 & +x^2 & & -6 \end{array}$$

b) $P(x) - Q(x)$

1.º Se halla el opuesto de $Q(x)$, $-Q(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 - 5x + 7$

2.º Se suman los polinomios $P(x)$ y $-Q(x)$.

$$\begin{array}{rrrrrrr} & -x^5 & & +4x^3 & & -5x & +1 \\ + & & +2x^4 & +3x^3 & -x^2 & -5x & +7 \\ \hline & -x^5 & +2x^4 & +7x^3 & -x^2 & -10x & +8 \end{array}$$


## 5.2. Producto de un polinomio por un monomio

Para **multiplicar un polinomio por un monomio**, se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

EJEMPLO

12. Multiplica el polinomio $P(x) = 4x^5 + 6x^3 - 2x^2 - 7x - 5$ por $5x^2$.

$5x^2 \cdot P(x) = 5x^2 \cdot (4x^5 + 6x^3 - 2x^2 - 7x - 5) =$
$= 20x^7 + 30x^5 - 10x^4 - 35x^3 - 25x^2$

**RESUELVE EL RETO**

¿Por qué número has de multiplicar un polinomio $P(x)$ para obtener su polinomio opuesto?

**ACTIVIDADES**

20 PRACTICA. Con estos polinomios, calcula:

$Q(x) = x^3 - 4x^2 + 2x \qquad R(x) = -2 - 2x^2 + 3x^3$

a) $Q(x) - R(x)$ c) $2 \cdot Q(x)$

b) $R(x) + Q(x)$ d) $R(x) \cdot (-3x^2)$

21 APLICA. Halla con los polinomios anteriores:

a) $(R(x) - Q(x)) \cdot 3$ b) $2 \cdot R(x) \cdot (-4x^2)$

22 REFLEXIONA. Sin operar, halla el grado de:

$M(x) = (2x^2 + x^4 + 3) - (7x + x^4 - 3)$

Scanned by CamScanner

### 5.3. Producto de polinomios

El **producto de dos polinomios** se calcula multiplicando cada término de uno de los polinomios por el otro, y sumando después los polinomios obtenidos en los productos.

**RESUELVE EL RETO**

Si $P(x) = 5x^4 - 10x + 20$, calcula $[3 \cdot P(x)] : 5$.

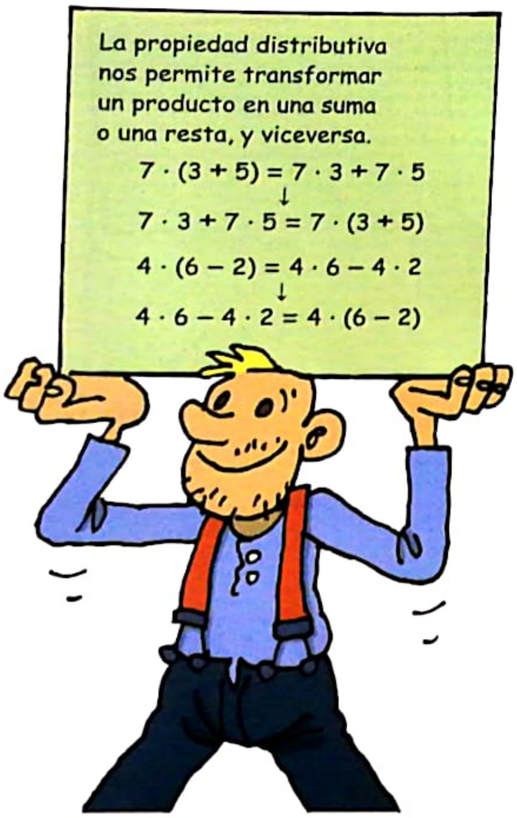
**EJEMPLO**

13. Multiplica estos polinomios: $P(x) = 4x^3 - 5x + 1$ $\quad Q(x) = 2x^2 - 7$

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (4x^3 - 5x + 1) \cdot (2x^2 - 7) = \\ &= (4x^3 - 5x + 1) \cdot (2x^2) + (4x^3 - 5x + 1) \cdot (-7) = \\ &= (8x^5 - 10x^3 + 2x^2) + (-28x^3 + 35x - 7) = \\ &= 8x^5 - 38x^3 + 2x^2 + 35x - 7 \end{aligned}$$

Si te resulta más sencillo, puedes escribirlo uno debajo del otro y operar:

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 5x + 1 \\ \times \;\; 2x^2 - 7 \\ \hline \end{array}$$




### 5.4. División de un polinomio entre un monomio

Para **dividir un polinomio entre un monomio**, se divide cada término del polinomio entre el monomio.

**EJEMPLO**

14. Divide el polinomio $P(x) = 18x^5 - 9x^4 + 6x^3 - 12x^2$ entre $3x^2$.

$$\begin{aligned} P(x) : 3x^2 &= (18x^5 - 9x^4 + 6x^3 - 12x^2) : 3x^2 = \\ &= (18x^5 : 3x^2) - (9x^4 : 3x^2) + (6x^3 : 3x^2) - (12x^2 : 3x^2) = \\ &= 6x^3 - 3x^2 + 2x - 4 \end{aligned}$$

### 5.5. Factor común

**Extraer factor común** consiste en transformar una expresión de suma o resta en producto.

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c) \qquad a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$$

**ACTIVIDADES**

**23** PRACTICA. Con estos polinomios, calcula:

$P(x) = 4x^2 - 8x + 12$ $\quad R(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$

$Q(x) = 3x^4 - 9x^2 + 6x$ $\quad S(x) = -2x^4 - 2x^2 + x$

a) $Q(x) \cdot S(x)$

b) $R(x) \cdot P(x)$

c) $5 \cdot P(x)$

d) $(-2) \cdot Q(x)$

e) $P(x) : 2$

f) $Q(x) : 3x$

**24** APLICA. Con los polinomios anteriores, calcula:

a) $-x^2 \cdot P(x) \cdot S(x)$

b) $(Q(x) \cdot 5x^3) : 15x^2$

**25** REFLEXIONA. Halla el valor de $a$ y $b$ para que:

$a(-x^3 + 2x^2 + 5x) = 3x^5 - 6x^4 - 15x^3$

$(12x^3 + 9x^2 - 21x) : b = -4x^2 - 3x + 7$

SABER HACER

## Extraer factor común en un polinomio

**Saca factor común en estos polinomios.**

a) $2x + 4y$ b) $24x^3 + 72x^2 - 6x$ c) $7xy^5 - 8x^2y^4 - 12y^2$

**Pasos a seguir**

**1.** Comprobamos si hay variables que se repiten en todos los términos. Si las hay, tomamos las que se repiten con los exponentes menores.

a) $2x + 4y \rightarrow$ No se repiten variables.
b) $24x^3 + 72x^2 - 6x \rightarrow x$ se repite en todos los términos.
$x$ con el exponente menor: $x$
c) $7xy^5 - 8x^2y^4 - 12y^2 \rightarrow y$ se repite en todos los términos
$y$ con el exponente menor: $y^2$

**2.** Hallamos el m.c.d. de los coeficientes de cada término.

a) m.c.d. $(2, 4) = 2$
b) m.c.d. $(6, 24, 72) = 6$
c) m.c.d. $(7, 8, 12) = 1$

**3.** El factor común está formado por el m.c.d. y las variables que hemos obtenido.

a) Factor común: 2
b) Factor común: $6x$
c) Factor común: $y^2$

**4.** Dividimos el polinomio entre el factor común y lo expresamos como producto del factor común por el polinomio cociente de la división.

a) $2x + 4y \xrightarrow{:2} x + 2y$
$2x + 4y = 2 \cdot (x + 2y)$
b) $24x^3 + 72x^2 - 6x \xrightarrow{:6x} 4x^2 + 12x - 1$
$24x^3 + 72x^2 - 6x = 6x \cdot (4x^2 + 12x - 1)$
c) $7xy^5 - 8x^2y^4 - 12y^2 \xrightarrow{:y^2} 7xy^3 - 8x^2y^2 - 12$
$7xy^5 - 8x^2y^4 - 12y^2 = y^2 \cdot (7xy^3 - 8x^2y^2 - 12)$

Cuando el factor común coincide con alguno de los términos, en lugar de ese término colocamos la unidad.
$a \cdot b + a = a \cdot (b + 1)$

## ACTIVIDADES

**26** Saca factor común.

a) $3x^2 + 2x - x^3 + x^4$
b) $6a^2 + 4a^3 - 8a + 2a^6$
c) $-7y^2 + 21y^3 - 14y^4$
d) $3xy^2 - 2x^2y - x^3 + xy^4$
e) $-6ab^2 + 12a^2b^2 - 18a^3b^3$
f) $8x^2y^3 - 12y^2z^4 + 16xy^4z + 4y^2$

**27** Saca factor común cuando sea posible.

a) $5y - 10xy^2 + 15x^2$
b) $7x - 12y$
c) $12x^4 - 30x^3 - 6x^2 + 42x$
d) $10x - 10y + z$
e) $15m^2n + 12m^3n^2 - m^4$
f) $a^3b^5 + a^2b^4 - a^4b^5$

**28** Completa en tu cuaderno.

a) $3x^2 \cdot (\square - x^3 + \square) = -6x^2 - \square + 3x^3$
b) $xy^2 \cdot (\square - \square) = 8x^2y^4 - 5xy^2$
c) $2x^2y^2 \cdot (\square + \square - x^3) = -2x^2y^3 + 6x^3y^4 - \square$
d) $-3a^2b \cdot (\square + \square) = 3a^2b^4 + 15a^3b$

**29** Saca factor común, si es posible, en estas expresiones.

a) $2x^2yz^4 - 4x^2y^3 - 6x^3z^2 + 3x^4yz$
b) $-5a^2bc^4 - 10ac^3 - 35a^2b^3c^2 + 15a^4bc$
c) $15p^2qr + 12p^2q^3r^2 - 3p^3q^2r^4 - 9p^4q^3r^4$
d) $-7a^3bc^3 + 7a^2c^4 + 21bc^5$

**30** Indica tres posibles valores de $a$ para que el factor común de $P(x, y)$ sea $2yx^2$.

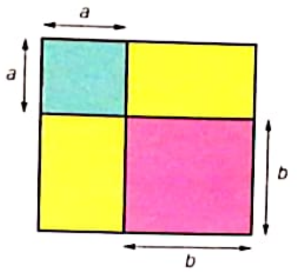
$$P(x, y) = -6yx^2 + 4y^3x^3 - a$$

# 6 Igualdades notables

Se llama **igualdades notables** a ciertos productos que sirven para facilitar algunos cálculos con expresiones algebraicas.

## 6.1. Cuadrado de una suma

Cuadrado de una suma




$$\underbrace{(a+b)^2}_{\text{Área total}} = \underbrace{a^2}_{\text{Área azul}} + \underbrace{2\cdot a\cdot b}_{\text{Área amarilla}} + \underbrace{b^2}_{\text{Área rosa}}$$

El **cuadrado de una suma de monomios**, *a* y *b*, es igual al cuadrado del primero más el doble del producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$$

**EJEMPLO**

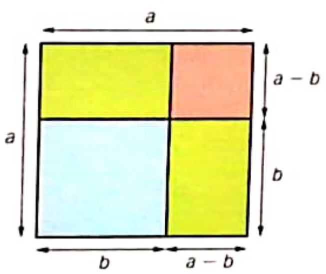
15. Calcula estos cuadrados.

a) $(3x+4)^2 \underset{a\,=\,3x,\; b\,=\,4}{=} (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 4 + 4^2 = 9x^2 + 24x + 16$

b) $(x^2+3)^2 \underset{a\,=\,x^2,\; b\,=\,3}{=} (x^2)^2 + 2\cdot x^2\cdot 3 + 3^2 = x^4 + 6x^2 + 9$

## 6.2. Cuadrado de una diferencia

Cuadrado de una diferencia




$$\underbrace{a^2}_{\text{Área total}} = \underbrace{(a-b)^2}_{\text{Área rosa}} + \underbrace{b^2}_{\text{Área azul}} + \underbrace{2(a-b)\,b}_{\text{Área verde}} =$$

$$= (a-b)^2 + b^2 + 2ab - 2b^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

El **cuadrado de una diferencia de monomios**, *a* y *b*, es igual al cuadrado del primero menos el doble del producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2$$

**EJEMPLO**

16. Calcula estos cuadrados.

a) $(5-3x)^2 = 5^2 - 2\cdot 5\cdot 3x + (3x)^2 = 25 - 30x + 9x^2$

b) $(3x^2-4x)^2 = (3x^2)^2 - 2\cdot 3x^2\cdot 4x + (4x)^2 = 9x^4 - 24x^3 + 16x^2$

### ACTIVIDADES

**31** PRACTICA. Calcula estos cuadrados.

a) $(x^2+7x)^2$

b) $\left(\frac{1}{3}+2x\right)^2$

c) $(1-2a^3)^2$

d) $\left(\frac{a^2}{3}-\frac{b}{2}\right)^2$

**32** PRACTICA. Desarrolla geométricamente.

a) $(x+3)^2$

b) $(3a-b)^2$

**33** APLICA. Corrige los errores.

a) $(3x+2)^2 = 9x^2 + 4$

b) $(2x^3+5x)^2 = 4x^6 - 20x^3 + 25x^2$

c) $(2x-5y^3)^2 = 2x^4 + 20xy^3 - 25y^6$

**34** REFLEXIONA. Razona tu respuesta. El cuadrado de una suma, ¿es igual a la suma de cuadrados?

**SABER HACER**

## Expresar un polinomio como cuadrado de una suma o una diferencia

**Estudia si los siguientes polinomios pueden expresarse como el cuadrado de una suma, $(a+b)^2$, o de una diferencia, $(a-b)^2$.**

**a)** $x^2+2x+1$ **b)** $9x^2-12x+4$ **c)** $16x^4-8x^3+4x^2$

Para poder expresar un polinomio mediante el cuadrado de una suma o de una diferencia tiene que tener tres términos y su grado debe ser par.

### Pasos a seguir

1. Hallamos $a$ y $b$:
   - El término con $x$ de mayor grado corresponde a $a^2$.
   - Si hay término independiente, corresponde a $b^2$. Si no lo hay, $b^2$ es el término con $x$ de menor grado.

a) $x^2+2x+1$
Término de grado mayor $= x^2 \xrightarrow{a^2=x^2} a = x$
Término independiente $= 1 \xrightarrow{b^2=1} b = 1$

b) $9x^2-12x+4$
Término de grado mayor $= 9x^2 \xrightarrow{a^2=9x^2} a = 3x$
Término independiente $= 4 \xrightarrow{b^2=4} b = 2$

c) $16x^4-8x^3+4x^2$
Término de mayor grado $= 16x^4 \xrightarrow{a^2=16x^4} a = 4x^2$
Término de menor grado $= 4x^2 \xrightarrow{b^2=4x^2} b = 2x$

2. Comprobamos que el término restante es igual a $2ab$.
   Si no es así, no podemos expresar el polinomio como el cuadrado de una suma o una diferencia.

a) $x^2+2x+1$
$2x \xrightarrow{a=x,\ b=1} 2ab = 2\cdot x\cdot 1 = 2x$. El término corresponde a $2ab$.

b) $9x^2-12x+4$
$12x \xrightarrow{a=3x,\ b=2} 2ab = 2\cdot 3x\cdot 2 = 12x$. El término corresponde a $2ab$.

c) $16x^4-8x^3+4x^2$
$8x^3 \xrightarrow{a=4x^2,\ b=2x} 2ab = 2\cdot 4x^2\cdot 2x = 16x^3$
Como $16x^3 \neq 8x^3$, no podemos expresarlo como un cuadrado.

3. Si el signo del término $2ab$ es positivo, la expresión buscada será del tipo $(a+b)^2$; si es negativo, $(a-b)^2$.

a) El signo del término $+2x$ es positivo, por tanto:
$x^2+2x+1=(x+1)^2$

b) El signo del término $-12x$ es negativo, por tanto:
$9x^2-12x+4=(3x-2)^2$

## ACTIVIDADES

**35** Expresa como el cuadrado de una suma si puedes.

a) $16x^4+24x^2+9$
b) $9x^4+12x^3+4x^2$
c) $25a^2b^4+20a^2b^2+4a^2$
d) $a^2b^2+2ab+2$

**36** Expresa como el cuadrado de una diferencia si es posible.

a) $9x^2-6x+4$
b) $b^4-ab+4a^2$
c) $x^2y^2+16xy-6^4$
d) $a^4-2a^3b+a^2b^2$

**37** Expresa, si es posible, como el cuadrado de una suma o de una diferencia.

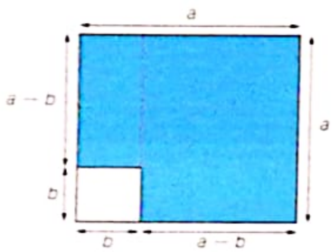
a) $x^2+4x+4$
b) $4x^4-12x^2+9$
c) $9b^4-6b^3+b^2$
d) $x^4+2x^2+1$
e) $\frac{1}{4}x^2-x+1$
f) $\frac{1}{9}x^4+\frac{2}{3}x^2y+y^2$
g) $\frac{16}{9}x^2+\frac{8}{3}xy+4y^2$

## 6.3. Suma por diferencia

Si $a$ y $b$ son dos monomios, el producto de **su suma por su diferencia** es igual a la diferencia de sus cuadrados.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Suma por diferencia




$$a^2 = b^2 + a(a - b) + (a - b)\,b =$$
$$= b^2 + (a - b)(a + b)$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

**EJEMPLO**

17. Calcula estos cuadrados.

a) $(x + 5)(x - 5) \underset{a = x,\ b = 5}{=} x^2 - 5^2 = x^2 - 25$

b) $(5 + x)(5 - x) \underset{a = 5,\ b = x}{=} 5^2 - x^2 = 25 - x^2$

c) $(2x + 3)(2x - 3) \underset{a = 2x,\ b = 3}{=} (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$

d) $(x^2 + 1)(x^2 - 1) \underset{a = x^2,\ b = 1}{=} (x^2)^2 - 1^2 = x^4 - 1$

e) $(4x^2 - 5)(4x^2 + 5) \underset{a = 4x^2,\ b = 5}{=} (4x^2)^2 - 5^2 = 16x^4 - 25$

f) $(2x - 3x^2)(2x + 3x^2) \underset{a = 2x,\ b = 3x^2}{=} (2x)^2 - (3x^2)^2 = 4x^2 - 9x^4$

g) $(-2 + 3x)(-2 - 3x) \underset{a = -2,\ b = 3x}{=} (-2)^2 - (3x)^2 = 4 - 9x^2$

h) $\left(\frac{x}{2} - 3\right)\left(\frac{x}{2} + 3\right) \underset{a = \frac{x}{2},\ b = 3}{=} \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 3^2 = \frac{x^2}{4} - 9$

### ACTIVIDADES

**38** PRACTICA. Expresa estos productos como una diferencia de cuadrados.

a) $(x - 4) \cdot (x + 4)$

b) $(3x - 3) \cdot (3x + 3)$

c) $(a^4 - 2a^2) \cdot (a^4 + 2a^2)$

d) $\left(2x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(2x + \frac{1}{2}\right)$

**39** PRACTICA. Desarrolla geométricamente este producto:

$$(2x - 3) \cdot (2x + 3)$$

**40** APLICA. Corrige los errores que hay en estas igualdades.

a) $(x - 3) \cdot (x + 3) = x^2 + 9$

b) $(2a - 5) \cdot (2a + 5) = 2a^2 - 25$

c) $(x^3 + 3y)(x^3 - 3y) = x^9 - 9y^2$

d) $(a^2 - 1) \cdot (a^2 + 1) = a^4 + 2a^2 - 1$

**41** REFLEXIONA. Calcula los valores de $a$ y $b$ para que se cumpla que:

$$(7x^2 + b) \cdot (7x^2 - b) = a - 25$$