Polinomios. Sucesiones numéricas

3

PUNTO DE PARTIDA

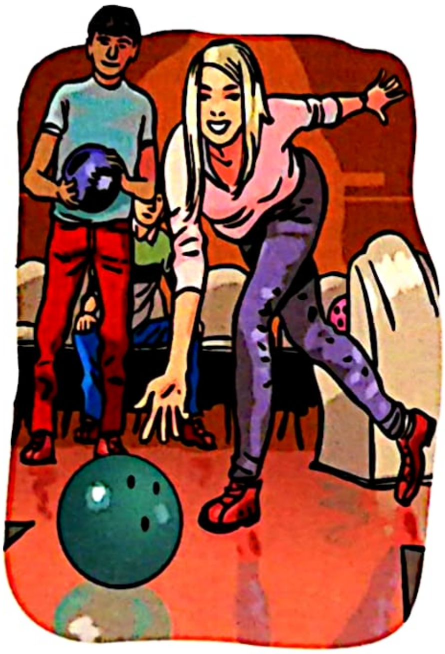
Las grandes superficies se caracterizan por la variedad de productos que presentan a sus clientes: artículos de menaje, de perfumería y limpieza, alimentación, etcétera.

Las naves de estos grandes comercios en las que se exponen los productos suelen tener forma rectangular. La relación entre el largo y el ancho de estas naves es muy variada, pero siempre intentan que el largo se acerque lo máximo posible al triple del ancho.

Si la nave de una gran superficie tiene 40 m de ancho, ¿cuál sería la longitud idónea de su largo? ¿Y si el ancho fuese x metros?

1 Lenguaje algebraico

El lenguaje algebraico expresa la información por medio de números y letras. Con él representamos los valores que no conocemos con letras que llamamos **incógnitas**.



EJEMPLOS

1. Un grupo de cinco amigos ha ido a jugar a los bolos. La primera que ha lanzado ha sido Berta, y esta es la cantidad de bolos que han tirado en sus lanzamientos los demás.

   1.º Abel ha tirado 3 bolos más que Berta.

   2.º Ignacio ha tirado el doble de bolos que Berta.

   3.º Silvia tira la mitad de bolos que Berta.

   4.º David tira el doble de bolos que Berta menos dos.

   Expresa con lenguaje algebraico el número de bolos que ha tirado cada uno.

   Puesto que no conocemos el número de bolos que ha tirado Berta, a esta cantidad la llamaremos x y será nuestra incógnita.

   Abel $\rightarrow x+3$ Ignacio $\rightarrow 2x$ Silvia $\rightarrow \frac{x}{2}$ David $\rightarrow 2x-2$

   Este tipo de expresiones se denominan **expresiones algebraicas**.

2. Si sabemos que Berta tiró 8 bolos, calcula los que tiró cada uno de sus amigos.

   Ahora sí conocemos el número de bolos que ha tirado Berta.
   Si sustituimos la incógnita por ese valor en las expresiones algebraicas anteriores, obtendremos el número de bolos que ha tirado cada amigo.
   A esto se le llama obtener el **valor numérico** de una expresión algebraica.

   Abel $\longrightarrow x+3 \xrightarrow{x=8} 8+3=11$

   Ignacio $\rightarrow 2x \xrightarrow{x=8} 2\cdot 8=16$

   Silvia $\longrightarrow \frac{x}{2} \xrightarrow{x=8} \frac{8}{2}=4$

   David $\longrightarrow 2x-2 \xrightarrow{x=8} 2\cdot 8-2=16-2=14$

ACTIVIDADES

1 Expresa en lenguaje algebraico.

a) Carmen tiene 5 años menos que Toñi.

b) En agosto hace el triple de temperatura que en enero.

c) He tardado en llegar al trabajo la cuarta parte del tiempo que tardé ayer.

d) En una carrera de coches participan el doble que el año pasado y 10 más.

2 Calcula el valor numérico de las expresiones que has obtenido en la actividad anterior sabiendo que:

a) Toñi tiene 14 años.

b) En enero hay 9 °C de temperatura.

c) Ayer tardé 40 minutos en llegar al trabajo.

d) El año pasado participaron en la carrera un total de 40 coches.

2 Igualdad, identidad y ecuación

Una **igualdad algebraica** está formada por dos expresiones algebraicas separadas por el signo $=$.

- Si una igualdad es cierta siempre, se llama **identidad**.
- Si hay algún valor para el que la igualdad no es cierta, se llama **ecuación**.

EJEMPLO

3. Indica si las siguientes igualdades algebraicas son identidades o ecuaciones.

a) $3x + 2x = 5x$

Para saber si la expresión algebraica es una identidad o una ecuación, vamos a sustituir la x por distintos números y, de esta forma, veremos si los dos miembros son iguales:

$$3x + 2x = 5x \rightarrow \begin{cases} \text{Si } x = 1 \rightarrow 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5 \cdot 1 \rightarrow 3 + 2 = 5 \\ \text{Si } x = 2 \rightarrow 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 5 \cdot 2 \rightarrow 6 + 4 = 10 \\ \text{Si } x = 3 \rightarrow 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 5 \cdot 3 \rightarrow 9 + 6 = 15 \end{cases}$$

La igualdad se verifica para todos los valores de x, por lo tanto, la expresión es una identidad.

b) $1 + 3x = 4 \rightarrow \begin{cases} \text{Si } x = 1 \rightarrow 1 + 3 \cdot 1 = 4 \rightarrow 1 + 3 = 4 \\ \text{Si } x = 2 \rightarrow 1 + 3 \cdot 2 = 7 \neq 4 \\ \text{Si } x = 3 \rightarrow 1 + 3 \cdot 3 = 10 \neq 4 \end{cases}$

Esta igualdad no se verifica para $x = 2$ y $x = 3$. Esto nos indica que es una ecuación.

c) $6x = 18 \rightarrow \begin{cases} \text{Si } x = 1 \rightarrow 6 \cdot 1 = 6 \neq 18 \\ \text{Si } x = 3 \rightarrow 6 \cdot 3 = 18 \end{cases}$

La igualdad no es verdadera cuando $x = 1$, por este motivo es una ecuación.

d) $7 = 5 + 2$

Se verifica siempre, así que es una identidad. Como no tiene incógnita, se llama igualdad numérica.

3 Monomios. Operaciones

Los **monomios** son las expresiones algebraicas más sencillas. Están formados por el producto de un número y una o varias letras.

- El número (incluido su signo) se llama **coeficiente**.
- Las letras que lo forman se denominan **parte literal**.

Llamamos **grado de un monomio** a la suma de los exponentes de las letras que lo forman.

EJEMPLOS

4. Indica cuáles de estas expresiones son monomios. Halla el coeficiente, la parte literal y el grado de dichos monomios.

a) $3x^2 \rightarrow$ Monomio Coeficiente $= 3$ Parte literal $= x^2$ Grado $= 2$

b) $-5x^4 \rightarrow$ Monomio Coeficiente $= -5$ Parte literal $= x^4$ Grado $= 4$

c) $-xy \rightarrow$ Monomio Coeficiente $= -1$ Parte literal $= xy$ Grado $= 2$

d) $3x^2 + 1 \rightarrow$ No es un monomio, es la suma de un monomio y un número.

e) $-x^2 + x \rightarrow$ No es un monomio, es la suma de dos monomios.

5. Resuelve las siguientes operaciones entre monomios.

a) $7x + 4x$

Para **sumar** o **restar monomios** deben tener la misma parte literal. Si es así, se suman o se restan los coeficientes y se deja la misma parte literal.

$$7x + 4x = (7 + 4)x = 11x$$

b) $7x^2 - 4x \rightarrow$ No tienen la misma parte literal, no se pueden restar.

c) $7x^2 - 4x^2 = (7 - 4)x^2 = 3x^2$

d) $7x^2 \cdot 4x$

Para **multiplicar** o **dividir monomios** se multiplican o dividen sus coeficientes por un lado y, por otro, sus partes literales.

$$7x^2 \cdot 4x = (7 \cdot 4)(x^2 \cdot x) = 28x^{2+1} = 28x^3$$

e) $\dfrac{8x^4}{2x^3} = (8:2)(x^4 : x^3) = 4x^{4-3} = 4x$

f) $-2 \cdot 5x^6 = (-2 \cdot 5)x^6 = -10x^6$

4 Polinomios

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma o la resta de dos o más monomios.

Cada uno de los monomios se llama **término.** Si un término no tiene parte literal, es decir, es un número, se denomina **término independiente.**

El mayor de los grados de todos sus términos se denomina **grado del polinomio.**

EJEMPLOS

6. Determina los términos, el término independiente y el grado de estos polinomios.

a) $2x^5 + 3x^2 - x + 7$

$$\underbrace{2x^5 + 3x^2 - x + 7}_{\text{Términos}} \longrightarrow 7 \text{ Término independiente}$$

El término de mayor grado es $2x^5 \rightarrow$ Grado del polinomio $= 5$

b) $3x^3 - x^4 + x^3 - 2x^2 + 5x - x$

Antes de trabajar con un polinomio hay que sumar y restar los monomios que se puedan y se deben ordenar sus términos, de mayor a menor grado.

$$\boxed{3x^3} - x^4 + \boxed{x^3} - 2x^2 + \boxed{5x} - \boxed{x} = 4x^3 - x^4 - 2x^2 + 4x$$

Y ahora ordenamos los términos de mayor a menor grado.

$$\underbrace{-x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 4x}_{\text{Términos}} \longrightarrow \text{No tiene término independiente}$$

El término de mayor grado es $-x^4 \rightarrow$ Grado del polinomio $= 4$

7. Halla el valor del polinomio $x^3 - 2x^2 - x + 1$ si x vale 1.

Para obtener el valor de un polinomio para un valor de x se sustituye x por el valor y se opera. El valor resultante se llama **valor numérico del polinomio.**

$$x^3 - 2x^2 - x + 1 \xrightarrow{x=1} 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 + 1 = -1$$

En este caso, el valor numérico de $x^3 - 2x^2 - x + 1$ para $x = 1$ es -1.

ACTIVIDADES

7 Reduce los términos que puedas de los polinomios y, después, ordénalos de mayor a menor grado. Halla su grado y di si tienen término independiente.

a) $2x - 3x^3 + x + 3 + 2x^3 - x^2 + 4x$

b) $-x^2 - x^3 + 2x + 2x^2 - 2x - 14$

c) $x - 6 + 4x^3 + 2$

8 Halla el valor numérico de estos polinomios para los valores de x que se indican en cada caso.

a) $x^3 - x^2 + x - 3$ para $x = 2$

b) $4x^3 - 2x + 7$ para $x = -2$

c) $-x^4 + 2x^3 - x - 9$ para $x = 0$

d) $-5x^2 + x^3 + 5x^2 + 1$ para $x = 5$

5 Operaciones con polinomios

- **Para sumar polinomios** se suman los monomios que tienen el mismo grado y se deja indicada la suma de los monomios que no lo tienen.
- **Para restar polinomios** se suma al primer polinomio el segundo con sus coeficientes cambiados de signo.
- **Para multiplicar un monomio por un polinomio** se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

EJEMPLO

8. Resuelve estas operaciones entre polinomios.

a) $(3x^4 - 2x^3 - x + 3) + (x^3 - x^2 + 6x - 1)$

Para sumar polinomios colocamos en columna los monomios con el mismo grado y sumamos.

$$\begin{array}{rrrrrr} & 3x^4 & -2x^3 & & -x & +3 \\ + & & x^3 & -x^2 & +6x & -1 \\ \hline & 3x^4 & -x^3 & -x^2 & +5x & +2 \end{array}$$

Por tanto:

$$(3x^4 - 2x^3 - x + 3) + (x^3 - x^2 + 6x - 1) = 3x^4 - x^3 - x^2 + 5x + 2$$

b) $(3x^4 - 2x^3 - x + 3) - (x^3 - x^2 + 6x - 1)$

Para restar dos polinomios cambiamos de signo todos los coeficientes del polinomio que se va a restar, y sumamos.

$$\begin{array}{rrrrrr} & 3x^4 & -2x^3 & & -x & +3 \\ - & & x^3 & -x^2 & +6x & -1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrrr} & 3x^4 & -2x^3 & & -x & +3 \\ + & & -x^3 & +x^2 & -6x & +1 \\ \hline & 3x^4 & -3x^3 & +x^2 & -7x & +4 \end{array}$$

Por tanto:

$$(3x^4 - 2x^3 - x + 3) - (x^3 - x^2 + 6x - 1) = 3x^4 - 3x^3 + x^2 - 7x + 4$$

c) $3x^2 \cdot (x^3 - x^2 + 6x - 5)$

Multiplicamos el monomio por todos los términos del polinomio.

$$\begin{aligned} 3x^2 \cdot (x^3 - x^2 + 6x - 5) &= 3x^2 \cdot x^3 - 3x^2 \cdot x^2 + 3x^2 \cdot 6x - 3x^2 \cdot 5 = \\ &= 3x^{2+3} - 3x^{2+2} + (3 \cdot 6)x^{2+1} - (3 \cdot 5)x^2 = \\ &= 3x^5 - 3x^4 + 18x^3 - 15x^2 \end{aligned}$$

6 Igualdades notables

Llamamos **igualdades notables** a una serie de productos que son muy útiles al operar con polinomios.

- El **cuadrado de una suma** es igual al cuadrado del primero más el doble del producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- El **cuadrado de una diferencia** es igual al cuadrado del primero menos el doble del producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- El producto de una **suma por su diferencia** es igual a la diferencia de los cuadrados.

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

EJEMPLO

9. Calcula estas operaciones.

a) $(x + 3)^2$

Llamamos a al primer término, $a = x$, y b al segundo término, $b = 3$, y aplicamos la fórmula del cuadrado de una suma:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + (2 \cdot 3)x + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

b) $(3x - 4)^2$

Llamamos a al primer término, $a = 3x$, y b al segundo término, $b = 4$, y aplicamos la fórmula del cuadrado de una diferencia:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(3x - 4)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2 = 3^2 \cdot x^2 - (2 \cdot 3 \cdot 4)x + 4^2 =$$
$$= 9x^2 - 24x + 16$$

c) $(x + 1) \cdot (x - 1)$

Llamamos a al primer término, $a = x$, y b al segundo término, $b = 1$, y aplicamos la fórmula de una suma por su diferencia:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$(x + 1) \cdot (x - 1) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$$

d) $(2x + 3) \cdot (2x - 3) \underset{a = 2x,\ b = 3}{=} (2x)^2 - 3^2 = 2^2 \cdot x^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$

ACTIVIDADES

11 Resuelve estos cuadrados.

a) $(x + 2)^2$

b) $(x - 2)^2$

c) $(3x - 2)^2$

d) $(1 + 2x)^2$

12 Halla el resultado de estas sumas por diferencia.

a) $(x + 5) \cdot (x - 5)$

b) $(3x + 1) \cdot (3x - 1)$

c) $(x - 3) \cdot (x + 3)$

d) $(2 - 5x) \cdot (2 + 5x)$

Sucesiones

Una sucesión es un conjunto ordenado de números reales:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots$$

A cada uno de los números que forman la sucesión se le llama término de la sucesión, y se designa por a_i, donde i indica el lugar que ocupa en la sucesión.

El término general de una sucesión es una expresión algebraica que nos permite calcular cualquier término de la sucesión sabiendo el lugar que ocupa, y se representa por a_n.

EJEMPLOS

10. Determina cuáles son los términos a_2 y a_5 en estas sucesiones.

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

a_2 es el segundo término, y a_5, el quinto → $a_2 = 2$ y $a_5 = 5$

b) 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... → $a_2 = 4$ y $a_5 = 10$

c) −1, −5, −10, −15, −20, −25, ... → $a_2 = -5$ y $a_5 = -20$

11. Determina el término siguiente de estas sucesiones.

a) 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... → Cada término es el anterior más 2.
Por tanto, a 11 le seguirá $11 + 2 = 13$.

b) 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... → Cada término es el anterior multiplicado por 2.
Así, a 32 le seguirá $32 \cdot 2 = 64$.

c) 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... → Cada término es el anterior más 2, más 3, más 4... Luego, a 21 le seguirá $21 + 7 = 28$.

12. Calcula los tres primeros términos de la sucesión que tiene como término general $a_n = 2n - 5$.

$a_1 = 2 \cdot 1 - 5 = -3$ $\quad a_2 = 2 \cdot 2 - 5 = -1$ $\quad a_3 = 2 \cdot 3 - 5 = 1$

13. Encuentra el término general de esta sucesión, y calcula a_{10} y a_{100}.

2, 4, 6, 8, 10, ...

$2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 4, 2 \cdot 5, \ldots$ → Cada término es el doble del lugar que ocupa.

Término general → $a_n = 2n$

$a_{10} = 2 \cdot 10 = 20$ $\quad a_{100} = 2 \cdot 100 = 200$

8 Sucesiones recurrentes

Una **sucesión** es **recurrente** cuando cada término, después de uno dado, se obtiene a partir de los anteriores.

EJEMPLOS

14. Halla el término siguiente de estas sucesiones y su término general.

a) 3, 5, 7, 9, 11, ... → Cada término, a partir del segundo, es el anterior más 2.

Por tanto, a 11 le seguirá $11 + 2 = 13$.

El término general de esta sucesión será:

- El primer término es 3 → $a_1 = 3$
- A partir del segundo, *cada término es igual al término anterior más 2* → $a_n = a_{n-1} + 2$

Término general → $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 2 \end{cases}$

b) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... → Cada término, a partir del tercero, es la suma de los dos anteriores.

Así, a 13 le seguirá $13 + 8 = 21$.

Calculamos su término general:

- El primer y el segundo término es 1 → $a_1 = 1$, $a_2 = 1$
- A partir del tercero, *cada término es la suma de los dos anteriores* → $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Término general → $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$

15. En un aparcamiento se cobra 1,20 € por la primera hora, y por cada hora siguiente, el doble que lo cobrado en la hora anterior. ¿Cuánto hay que pagar por 4 horas?

El coste del aparcamiento es una sucesión recurrente en la que el primer término es el precio de una hora, $a_1 = 1{,}20$ €, y el resto es el doble del coste de la hora anterior, $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$.

1.ª hora $= a_1 = 1{,}20$ €

2.ª hora $= a_2 = 1{,}20 \cdot 2 = 2{,}40$ €

3.ª hora $= a_3 = 2{,}40 \cdot 2 = 4{,}80$ €

4.ª hora $= a_4 = 4{,}80 \cdot 2 = 9{,}60$ €

Por 4 horas de aparcamiento hay que pagar 9,60 €.

9 Progresiones aritméticas

Una progresión aritmética es una sucesión en la que cada término, menos el primero, se obtiene a partir del anterior sumándole un número fijo, *d*, llamado diferencia.

El término general de una progresión aritmética es:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

donde a_1 es el primer término y d es la diferencia.

EJEMPLOS

16. Determina si esta sucesión es una progresión aritmética y, si es así, calcula su término general y el término a_{50}.

5, 8, 11, 14, 17, 20, ...

$$5 \xrightarrow{+3} 8 \xrightarrow{+3} 11 \xrightarrow{+3} 14 \xrightarrow{+3} 17 \xrightarrow{+3} 20, \dots$$

Cada término, a partir del primero, es el anterior más 3.

Es una progresión aritmética con diferencia $d = 3$.

Para calcular su término general tomamos su primer término, $a_1 = 5$, y su diferencia, $d = 3$, y aplicamos la fórmula:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \xrightarrow{a_1 = 5,\, d = 3} a_n = 5 + (n-1) \cdot 3 = 5 + 3n - 3 = 3n + 2$$

El término general es $a_n = 3n + 2$.

Para calcular a_{50} sustituimos en el término general.

$$a_{50} = 3 \cdot 50 + 2 = 152$$

17. Tengo que colocar 15 filas de tornillos de manera que en la primera fila pondré 3 tornillos, y cada una de las siguientes filas tendrá 4 tornillos más que la anterior. ¿Cuántos tornillos tendrá la última fila?

Los tornillos de cada fila forman una progresión aritmética de diferencia $d = 4$, cuyo primer término es $a_1 = 3$. Por tanto, su término general será:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \xrightarrow{a_1 = 3,\, d = 4} a_n = 3 + (n-1) \cdot 4 = 3 + 4n - 4 = 4n - 1$$

Para calcular los tornillos de la fila 15 calculamos a_{15}.

$$a_n = 4n - 1 \xrightarrow{n = 15} a_{15} = 4 \cdot 15 - 1 = 59$$

La última fila tendrá 59 tornillos.

10 Progresiones geométricas

Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que cada término (menos el primero) se obtiene multiplicando el anterior por un número fijo, r, llamado **razón**.

El término general de una progresión geométrica es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

donde a_1 es el primer término y r es la razón.

EJEMPLOS

18. **Determina si esta sucesión es una progresión geométrica y, si es así, calcula su término general y el término a_{10}.**

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$$

$$1, \xrightarrow{\cdot 2} 2, \xrightarrow{\cdot 2} 4, \xrightarrow{\cdot 2} 8, \xrightarrow{\cdot 2} 16, \xrightarrow{\cdot 2} 32, \dots$$

Cada término, a partir del primero, es el anterior multiplicado por 2.

Es una progresión geométrica de razón $r = 2$.

Para calcular su término general tomamos su primer término, $a_1 = 1$, y su razón, $r = 2$, y aplicamos la fórmula:

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

Para calcular a_{10} sustituimos en el término general.

$$a_n = 2^{n-1} \xrightarrow{n=10} a_{10} = 2^{10-1} = 2^9 = 512$$

19. **Una bacteria se reproduce por bipartición una vez cada minuto. Si cuando empezamos el experimento hay 2 bacterias, ¿cuántas habrá al cabo de media hora?**

Cada minuto tenemos el doble de bacterias. Las bacterias que hay cada minuto forman una progresión geométrica de razón $r = 2$ y cuyo primer término es $a_1 = 2$. Por tanto, su término general será:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \xrightarrow{a_1=2,\, r=2} a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1+1} = 2^n$$

Para calcular las bacterias que habrá cuando hayan pasado 30 minutos calculamos a_{30}.

$$a_n = 2^n \xrightarrow{n=30} a_{30} = 2^{30} = 1\,073\,741\,824$$

Al cabo de media hora habrá 1 073 741 824 bacterias.