1 Monomios

Una **expresión algebraica** es un conjunto de números y letras unidos mediante los signos de las operaciones aritméticas.

Un **monomio** es una expresión algebraica de un solo término, en la que un número multiplica a una o más letras (**incógnitas**) con exponentes naturales. En un monomio:

- El número (incluido su signo) es el **coeficiente**.
- La **parte literal** son las letras con sus exponentes.

El **grado** de un monomio es la suma de los exponentes de su parte literal.

EJEMPLOS

1. **Indica el coeficiente y la parte literal de estos monomios. Identifica las incógnitas y calcula su grado.**

   a) $-3x^5zj^2$ → Coeficiente $= -3$ Parte literal $= x^5zj^2$
   Incógnitas → x, z, j Grado $= 5 + 1 + 2 = 8$

   b) $14t^4y$ → Coeficiente $= 14$ Parte literal $= t^4y$
   Incógnitas → t, y Grado $= 4 + 1 = 5$

2. **¿Son semejantes los siguientes monomios?**

   Dos monomios son semejantes cuando sus partes literales son iguales.

   a) $5a^2my$ y $-8a^2my$ → Misma parte literal $= a^2my$
   Son monomios semejantes.

   b) $6x^3yz^4$ y $\frac{1}{3}yz^4x^3$ → Misma parte literal $= x^3yz^4 = yz^4x^3$
   Son monomios semejantes.

   c) $-8aj^4$ y $-8a^4j$ → Distinta parte literal. No son semejantes.

ACTIVIDADES

1 Completa la siguiente tabla en tu cuaderno.

Monomio	$4xy^2t$	$-2a^5b^2$	$6n^3k$	h^4c
Incógnitas				
Parte literal				
Coeficiente				
Grado				

2 Indica si estos monomios son semejantes.

a) $\frac{2}{5}b^3cd$ y $\frac{1}{3}b^2cd$

b) $7x^2y^3z^4$ y $-5x^2y^3z^4$

c) $2m^6j$ y $-8m^6j$

d) $\frac{1}{2}kh^3t$ y $2h^3t$

3 Escribe un monomio en cada caso.

a) Semejante a $-2zw^3h$.

b) Con las mismas incógnitas que $6x^5vs^2$.

c) Con tres incógnitas y grado 6.

d) Con el mismo grado que $5d^2e^3f^4$, pero distintas incógnitas.

e) No semejante a $2x^6wa$.

f) Con grado 5 y las incógnitas k, d, m y x.

g) Con coeficiente negativo y fraccionario y grado 4.

h) Semejante a $9m^4fc^3$.

i) Con el mismo coeficiente que $\frac{1}{5}x^7y^2$.

2 Operaciones con monomios

Para **sumar o restar** monomios, estos **tienen que ser semejantes.**

Para sumar o restar monomios, se suman o se restan sus coeficientes y se mantiene la misma parte literal.

Para **multiplicar o dividir** monomios, se multiplican o dividen, por un lado, los coeficientes y, por otro, las partes literales.

EJEMPLOS

3. Opera, si es posible, los siguientes monomios.

a) $5x^2y^4 - 2x^2y^4 \rightarrow$ Los monomios son semejantes.

Restamos los coeficientes y dejamos las partes literales.

$$5x^2y^4 - 2x^2y^4 = (5-2)x^2y^4 = 3x^2y^4$$

b) $\frac{3}{2}x^6y^2 + 2x^6y^2 \rightarrow$ Los monomios son semejantes.

$$\frac{3}{2}x^6y^2 + 2x^6y^2 = \left(\frac{3}{2}+2\right)x^6y^2 = \frac{7}{2}x^6y^2$$

c) $4xy^3 + 6xy^3 - 4y^3 \rightarrow$ Los dos primeros monomios son semejantes, pero no el tercero. Podemos operar solo la suma.

$$4xy^3 + 6xy^3 - 4y^3 = (4+6)xy^3 - 4y^3 = 10xy^3 - 4y^3$$

4. Multiplica y divide los siguientes monomios.

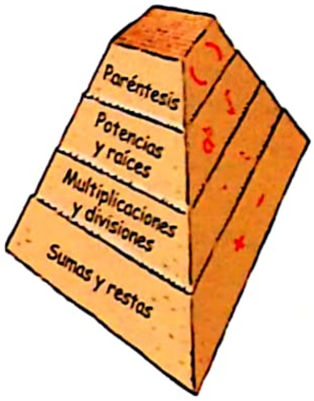
a) $4x^2 \cdot (-2x) \rightarrow$ Multiplicamos los coeficientes por un lado y las incógnitas por otro.

$$4x^2 \cdot (-2x) = 4 \cdot (-2)x^{2+1} = -8x^3$$

b) $\frac{2}{3}xy^4 \cdot 6x^2y = \left(\frac{2}{3} \cdot 6\right)x^{1+2}y^{4+1} = 4x^3y^5$

c) $\frac{9x^5y^2}{3x^2y} \rightarrow$ Dividimos los coeficientes y las partes literales.

$$\frac{9x^5y^2}{3x^2y} = \frac{9}{3}x^{5-2}y^{2-1} = 3x^3y$$



ACTIVIDADES

4 Efectúa las siguientes operaciones con monomios.

a) $7x^4 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{10}{6}x^4$

b) $\frac{1}{3}xy^2 + 2xy^2 - \frac{4}{3}xy^2$

c) $-4x^2y + 5x^2y - 3x^2y + 2x^2y$

d) $x^4yz^3 - 5x^4yz^3 + 8x^4yz^3$

5 Calcula, respetando la jerarquía de las operaciones.

a) $-8x^4 + \frac{9}{4}x^3 \cdot \frac{16}{3}x$

b) $\frac{5}{2}x^2 \cdot \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}x$

c) $\left(\frac{1}{6}xy^4 + \frac{5}{6}xy^4\right) \cdot (-2y^3)$

d) $(2xy^5 + 4xy^5) : (-3xy^3 + 12xy^3)$

3 Polinomios

Término independiente

Coeficientes

$$-3x^2z^3 + 2hk^2 - 4jk + 5$$

Términos

Un **polinomio** es la suma o resta de varios monomios, que reciben el nombre de **términos**.

Al monomio que no tiene parte literal se le llama **término independiente.**

El **grado** del polinomio es el mayor de los grados de los monomios que contiene.

> Los polinomios se designan con letras mayúsculas, indicando entre paréntesis las variables que intervienen.
>
> - $P(x) = 6x^5 - 3x^4 - 9x + 7$ Polinomio de una variable, x.
> - $P(x, y) = 2x^2y - 7x - 2y$ Polinomio de dos variables, x e y.

EJEMPLOS

5. Indica los términos, los coeficientes y el grado del polinomio $P(x) = 7x^6 + 4x^4 - 6x^2 - 4$

- Los términos son: $7x^6$, $4x^4$, $-6x^2$ y -4. Este último es el término independiente.
- Cuando en un polinomio no hay términos correspondientes a uno o más grados, los coeficientes de esos términos son 0. Si escribimos el polinomio completo:

$$P(x) = 7x^6 + 0x^5 + 4x^4 + 0x^3 - 6x^2 + 0x - 4$$

Por tanto, los coeficientes son 7, 0, 4, 0, -6, 0 y -4.

- El grado del polinomio es el máximo grado de los monomios que lo forman:

$$7x^6 \rightarrow \text{Grado monomio} = \text{Grado polinomio} = 6.$$

6. Halla el valor numérico de cada polinomio para el valor de x dado.

El valor numérico de un polinomio es el resultado de sustituir la variable por un número determinado y operar.

a) $P(x) = -2x^3 + 5x - 2$ para $x = 1 \rightarrow P(1) = -2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1 - 2 = 1$

b) $P(x) = 3x^4 - 6x^2 + 2x - 16$ para $x = -2$

$\rightarrow P(-2) = 3 \cdot (-2)^4 - 6 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 16 = 48 - 24 - 4 - 16 = 4$

c) $P(x) = -x^5 - 3x^3 + 8x^2 - x + 4$ para $x = 0 \rightarrow P(0) = 4$

ACTIVIDADES

6 Indica los términos, el término independiente y el grado de estos polinomios.

a) $-4x^5 + x^4 + 3x^2 - 11$

b) $8x^5 - x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 1$

c) $x^7 - 5x^6 + 14x^4 - 13x + 24$

d) $-\frac{1}{2}x^{15} - 6x^9 - 4x^8 + 9x^6 - 3x^4 - 4x + 7$

e) $4x^5 + 5x^3 - 3x^2 + 6x - 1$

f) $x^4 + 8x^3 - x^2 + 12x$

g) $x^9 - 11x^7 + 4$

7 Halla el valor numérico de cada polinomio para los valores de x que se indican.

a) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 6x + 2$ para $x = 1$

b) $P(x) = -x^5 + 6x^3 + 4x^2 - 5$ para $x = -1$

c) $P(x) = 4x^3 + 3x^2 + 8x - 5$ para $x = -2$

d) $P(x) = -5x^6 + x^3 + 3x^2$ para $x = -1$

e) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 6$ para $x = 4$

f) $P(x) = 3x^5 - 4x^3 - 20x - 8$ para $x = 2$

g) $P(x) = 6x^8 - 7x^6 - 5x^4$ para $x = 0$

4 Suma y resta de polinomios

- Para **sumar polinomios**, se suman los monomios semejantes y se deja indicada la suma de los monomios que no lo son.
- Para **restar polinomios**, se suma al primer polinomio el segundo con sus coeficientes cambiados de signo.

EJEMPLO

7. Dados los polinomios $P(x) = 5x^4 - 6x^3 + 4x - 7$ y $Q(x) = -3x^4 + x^3 - 5x^2 + 12$, halla:

a) $P(x) + Q(x)$

Si ponemos los polinomios en columna, podemos hacer coincidir los monomios semejantes de ambos.

$$\begin{array}{rrrrrr} & 5x^4 & -6x^3 & & +4x & -7 \\ + & -3x^4 & +x^3 & -5x^2 & & +12 \\ \hline & 2x^4 & -5x^3 & -5x^2 & +4x & +5 \end{array}$$

$$P(x) + Q(x) = 5x^4 - 6x^3 + 4x - 7 + (-3x^4 + x^3 - 5x^2 + 12) =$$
$$= 2x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 5$$

b) $P(x) - Q(x)$

Para restar dos polinomios, cambiamos de signo todos los coeficientes del polinomio que se va a restar y lo sumamos con el primero.

$$Q(x) = -3x^4 + x^3 - 5x^2 + 12 \rightarrow -Q(x) = 3x^4 - x^3 + 5x^2 - 12$$

$$\begin{array}{rrrrrr} & 5x^4 & -6x^3 & & +4x & -7 \\ + & 3x^4 & -x^3 & +5x^2 & & -12 \\ \hline & 8x^4 & -7x^3 & +5x^2 & +4x & -19 \end{array}$$

$$P(x) - Q(x) = P(x) + (-Q(x)) =$$
$$= 5x^4 - 6x^3 + 4x - 7 + (3x^4 - x^3 + 5x^2 - 12) =$$
$$= 8x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 4x - 19$$

El polinomio que se obtiene al cambiar de signo todos los coeficientes se llama polinomio opuesto.

$Q(x) = -x^3 - 5x^2 + 12$

Polinomio opuesto

$-Q(x) = x^3 + 5x^2 - 12$

ACTIVIDADES

8 Halla el opuesto de cada polinomio.

a) $P(x) = -4x^6 + 12x^5 - 7x^2 + 4x$

b) $Q(x) = 12x^4 + 6x^3 - 10x^2 + 5x - 7$

c) $R(x) = 8x^5 - 6x^3 - x^2 + 16$

d) $S(x) = -x^3 + 15x^2 - 9$

9 Efectúa las siguientes operaciones entre los polinomios del ejercicio anterior.

a) $P(x) - S(x)$

b) $Q(x) + R(x)$

c) $R(x) - S(x)$

d) $R(x) - P(x) + S(x)$

e) $Q(x) + S(x) - R(x)$

f) $P(x) - R(x) - S(x)$

10 Suma o resta los siguientes polinomios.

a) $(16x^3 + 4x^2 - 3x + 7) - (2x^4 + 11x^3 - 2x^2)$

b) $(-5x^3 + 3x^2 - 8x + 6) + (8x^3 - 9x^2 + 6x)$

c) $(7x^5 + 5x^3) - (-x^5 + 3x^4 - x^3 - 4)$

d) $(x^5 - 4x^2 + 10) - (-x^5 - 6x^2 + 4)$

e) $(-x^2 - 4x - 5) + (3x^2 + 3x + 1)$

f) $(x^2 - 5x - 2) - (x^2 - 2x - 7)$

g) $(4x^6 + 3x^3 - 5x) + (2x^6 - 5x^2 + 3x)$

h) $(-x^7 - x^6 + x^5) - (x^7 + x^6 + x^5)$

i) $(9x^8 - 2x^2 + 6) + (-9x^8 + 2x^2 - 6)$

5 Multiplicación de polinomios

- Para **multiplicar un monomio por un polinomio,** se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio.
- Para **multiplicar dos polinomios,** se multiplican todos los términos del primer polinomio por cada uno de los términos del segundo, y después se suman los polinomios que se obtienen.

Un signo menos delante de un paréntesis cambia de signo todos los términos del polinomio que hay dentro del paréntesis.

$-(-4x^2 + 12x + 6) =$
$= 4x^2 - 12x - 6$
$-(4x^2 - 8x) = -4x^2 + 8x$

EJEMPLOS

8. Efectúa las operaciones indicadas con estos polinomios.

$P(x) = -2x^2 + x - 1 \qquad Q(x) = x^3 - 2x - 1 \qquad R(x) = -2x^2 + 6x + 3$

a) $3x \cdot Q(x) + 2 \cdot P(x) = 3x \cdot (x^3 - 2x - 1) + 2 \cdot (-2x^2 + x - 1) =$
$= (3x^4 - 6x^2 - 3x) + (-4x^2 + 2x - 2) =$
$= 3x^4 - 6x^2 - 3x - 4x^2 + 2x - 2 =$
$= 3x^4 - 10x^2 - x - 2$

b) $-3x \cdot P(x) - 2 \cdot R(x) = -3x \cdot (-2x^2 + x - 1) - 2 \cdot (-2x^2 + 6x + 3) =$
$= (6x^3 - 3x^2 + 3x) - (-4x^2 + 12x + 6) =$
$= 6x^3 - 3x^2 + 3x + 4x^2 - 12x - 6 =$
$= 6x^3 + x^2 - 9x - 6$

9. Realiza esta multiplicación: $(3x^2 + x - 4) \cdot (x^2 - 2x)$

$(3x^2 + x - 4) \cdot (x^2 - 2x) = 3x^2 \cdot (x^2 - 2x) + x \cdot (x^2 - 2x) - 4 \cdot (x^2 - 2x) =$
$= (3x^4 - 6x^3) + (x^3 - 2x^2) - (4x^2 - 8x) =$
$= 3x^4 - 6x^3 + x^3 - 2x^2 - 4x^2 + 8x =$
$= 3x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 8x$

ACTIVIDADES

11 Dados los polinomios $P(x) = 4x^2 - 2x + 1$, $Q(x) = 3x^2 - 2$ y $R(x) = x^3 - 1$, realiza las siguientes operaciones.

a) $-3x \cdot R(x) - P(x)$
b) $Q(x) + 2x \cdot P(x)$
c) $P(x) - 2Q(x) - 4x^2 \cdot R(x)$
d) $2 \cdot (Q(x) - P(x)) + 4x \cdot R(x)$

12 Resuelve los siguientes productos.

a) $(2 - 3x^3) \cdot (2x - 6)$
b) $(-x^4 + 3x) \cdot (x^3 - x + 4)$
c) $(5x^3 - 6) \cdot (-2x^2 + 3x + 4)$
d) $(x^5 - 5x^3 + x) \cdot (x - 4)$
e) $(-x^7 - 4x^4 - x^2) \cdot (3x - 1)$

13 Efectúa las operaciones que se indican con los polinomios $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$.

$P(x) = 2x^3 - x + 2 \qquad Q(x) = x^2 - 4$
$R(x) = 3x^2 + 2x - 4$

a) $P(x) \cdot Q(x) - 2x^2 \cdot R(x)$
b) $(R(x) - Q(x)) \cdot P(x)$
c) $3x \cdot Q(x) + P(x) \cdot R(x)$
d) $4 \cdot (Q(x) - R(x)) \cdot P(x)$
e) $-2 \cdot Q(x) \cdot R(x) + 3x \cdot P(x)$
f) $P(x) \cdot Q(x) \cdot R(x) - 2x^2 \cdot P(x)$
g) $5 \cdot P(x) + 4 \cdot Q(x) - x \cdot R(x)$
h) $P(x) \cdot P(x)$
i) $R(x) \cdot x^3 - Q(x) \cdot x^2$

6 División de polinomios

Al dividir dos polinomios $P(x) : Q(x)$ se obtienen otros dos, $C(x)$ y $R(x)$, de forma que:

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

$$\text{grado de } R(x) < \text{grado de } Q(x)$$

EJEMPLO

10. Efectúa esta división: $(4x^4 + 2x^2 - 6x + 3) : (x^2 - x + 1)$

Escribimos el dividendo dejando huecos en los términos con coeficiente 0. Dividimos el primer término del primer polinomio entre el primer término del segundo.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & & +2x^2 & -6x & +3 & x^2-x+1 \\ \cline{6-6}
 & & & & & 4x^2
\end{array}$$

Multiplicamos el término obtenido por el divisor y lo situamos cambiado de signo debajo del dividendo. Sumamos.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & & +2x^2 & -6x & +3 & x^2-x+1 \\ \cline{6-6}
-4x^4 & +4x^3 & -4x^2 & & & 4x^2 \\ \cline{1-5}
 & 4x^3 & -2x^2 & -6x & +3 &
\end{array}$$

Repetimos la operación tantas veces como sea necesario, hasta obtener un polinomio cuyo grado sea menor que el del divisor.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & & +2x^2 & -6x & +3 & x^2-x+1 \\ \cline{6-6}
-4x^4 & +4x^3 & -4x^2 & & & 4x^2+4x+2 \\ \cline{1-5}
 & 4x^3 & -2x^2 & -6x & +3 & \\
 & -4x^3 & +4x^2 & -4x & & \\ \cline{2-5}
 & & 2x^2 & -10x & +3 & \\
 & & -2x^2 & +2x & -2 & \\ \cline{3-5}
 & & & -8x & +1 &
\end{array}$$

El polinomio $C(x) = 4x^2 + 4x + 2$ es el cociente de la división y $R(x) = -8x + 1$, el resto. Y siempre se cumple que:

$$\text{Si } \begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array} \rightarrow \begin{cases} P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x) \text{ (PRUEBA DE LA DIVISIÓN)} \\ \text{grado } R(x) < \text{grado } Q(x) \end{cases}$$

La división está bien realizada, ya que:

$$4x^4 + 2x^2 - 6x + 3 = (x^2 - x + 1) \cdot (4x^2 + 4x + 2) + (-8x + 1)$$
$$\text{grado } R(x) = 1 < \text{grado } Q(x) = 2$$

ACTIVIDADES

14 Divide los siguientes polinomios.

a) $(3x^5 - 2x + 3) : (x^3 + 2)$
b) $(2x^6 - x^4 + 3x - 4) : (x^4 - 2x + 2)$
c) $(4x^4 - x^3 + 2x^2 + 4) : (x^2 - 4x + 3)$
d) $(-5x^7 + 4x^5 - 2x^2 + 1) : (x^4 + 5)$
e) $(x^3 - 3x^2 + 3x) : (x - 4)$

15 Efectúa las siguientes divisiones y comprueba el resultado.

a) $(-4x^4 + 2x^3 - 3x + 2) : (2x^2 - 1)$
b) $(x^6 - 8x^5 + 6x^4 - 2) : (x^4 + x - 3)$
c) $(6x^5 + 4x^3 - 3x^2 + 5) : (x^3 - 5x + 4)$
d) $(7x^3 + 6x - 4) : (x - 3)$

9 Sacar factor común

Cuando en un polinomio existe un factor que se repite en todos sus términos, se puede extraer factor común.

Extraer factor común consiste en escribir el polinomio como un producto en el que uno de sus factores está formado por los factores que se repiten en todos sus términos.

EJEMPLO

14. Saca factor común en los siguientes polinomios:

a) $3x^3 - 3x^2 + 6x$

Primero comprobamos si todos los sumandos tienen x. Si las hay, tomamos la potencia de x con menor exponente, en este caso x.

Después hallamos el m.c.d. de los coeficientes: m.c.d. $(3, 3, 6) = 3$.

El factor común del polinomio es el producto del m.c.d. y la potencia de x que hemos obtenido.

$$\text{Factor común} = 3x$$

Dividimos cada término del polinomio por el factor común y expresamos el polinomio como producto del factor común por el polinomio resultante de la división.

$$3x^3 - 3x^2 + 6x \xrightarrow{:3x} x^2 - x + 2$$
$$3x^3 - 3x^2 + 6x = 3x \cdot (x^2 - x + 2)$$

b) $4x^5 - 8x^3 - 2x^2$

Hay x en todos los sumandos. La potencia menor es x^2.

$$\text{m.c.d.}\ (4, 8, 2) = 2 \rightarrow \text{Factor común} = 2x^2$$
$$4x^5 - 8x^3 - 2x^2 \xrightarrow{:2x^2} 2x^3 - 4x - 1$$
$$4x^5 - 8x^3 - 2x^2 = 2x^2 \cdot (2x^3 - 4x - 1)$$

c) $-x^3 + 3x^2 - 3x \rightarrow$ m.c.d. $(1, 3, 3) = 1$.

Hay x en todos los sumandos $\rightarrow$ Factor común $= x$.

$$-x^3 + 3x^2 - 3x \xrightarrow{:x} -x^2 + 3x - 3$$
$$-x^3 + 3x^2 - 3x = x \cdot (-x^2 + 3x - 3)$$

Cuando el factor común coincide con uno de los términos del polinomio, en el lugar de este término ponemos la unidad.

$$2x^2 + 2x = 2x \cdot (x + 1)$$

ACTIVIDADES

20 Saca como factor común los monomios que se indican.

a) $3x^2$ en $9x^4 - 6x^3 + 3x^2$

b) $-4x^3$ en $-12x^5 + 8x^4 - 36x^3$

c) $2x$ en $6x^3 - 2x^2 + 4x$

d) $5x^2$ en $25x^5 - 5x^2$

e) $-3x$ en $3x^4 - 6x^2 + 3x$

f) x^3 en $7x^8 + 4x^6 - 3x^4$

21 Saca factor común en los polinomios siguientes.

a) $16x^3 - 12x^2 + 4x$

b) $-75x^6 - 25x^5 + 15x^3 - 5x^2$

c) $48x^5 + 36x^4 - 24x^3$

d) $26x^6 - 13x^4$

e) $5x^3 - x^2 + 5x$

f) $-9x^4 - 6x^2 + 12x$

10 Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio consiste en escribirlo como un producto de varios polinomios, de manera que estos tengan el menor grado posible.

Se puede factorizar un polinomio sacando factor común, utilizando la regla de Ruffini y mediante las igualdades notables.

EJEMPLO

15. **Factoriza el polinomio $x^3 + x^2 - 2x$.**

Lo primero que hacemos es sacar factor común, si es posible.

Como x se repite en todos los términos y m.c.d. (1, 1, 2) = 1

$$x^3 + x^2 - 2x = x \cdot (x^2 + x - 2)$$

Ahora intentamos factorizar $x^2 + x - 2$. Para ello utilizamos la regla de Ruffini.

Tenemos que encontrar un número a tal que, al dividir $x^2 + x - 2$ entre $x - a$, el resto sea cero. Estos números, si existen, están siempre entre los divisores del término independiente del polinomio. En este caso:

$$\text{Div}(2) = \{-1, 1, -2, 2\}$$

Vamos probando con cada uno de estos números hasta encontrar uno con el que la división tenga resto 0.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -2 \\ -1 & & -1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & -2 \end{array}$$

→ Resto ≠ 0. Probamos con el siguiente divisor.

Divisor = $x - 1$ Dividendo = $x^2 + x - 2$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Resto = 0

Cociente = $x + 2$

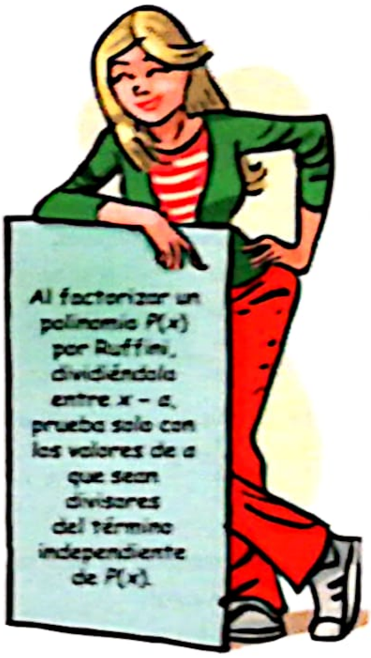
Por la prueba de la división podemos escribir:

$$\text{Dividendo} = \text{Divisor} \cdot \text{Cociente} + \text{Resto}$$

$$x^2 + x - 2 = (x - 1) \cdot (x + 2) + 0 = (x - 1) \cdot (x + 2)$$

Así, el polinomio inicial lo podemos factorizar como:

$$x^3 + x^2 - 2x = x \cdot (x^2 + x - 2) = x \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$$



ACTIVIDADES

22. **Factoriza los siguientes polinomios.**
    a) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$
    b) $P(x) = x^3 + x^2 - 6x$
    c) $P(x) = x^4 - x^3 - 6x^2$
    d) $P(x) = 4x^3 - 4x^2 - 24x$

23. **Factoriza estos polinomios.**
    a) $P(x) = x^3 - 7x - 6$
    b) $P(x) = x^3 - 3x + 2$
    c) $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$
    d) $P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$

Monomios. Operaciones

24 Indica cuáles son el coeficiente y la parte literal de los siguientes monomios.

a) $-2x^2t$
b) $4bkm^4$
c) $7y^4h^2j$
d) $-5f^6p^3z$
e) $\frac{3}{2}q^4f^6g^2$
f) $-\frac{3}{5}z^3yb^2$

25 Indica el grado de cada uno de los monomios del ejercicio anterior.

26 Completa la siguiente tabla en tu cuaderno.

Monomio	$-2m^2r$	a^4c^3	$8f^2kp$	$-3g^2c^4$
Incógnitas				
Parte literal				
Coeficiente				
Grado				

27 ¿Son semejantes los siguientes pares de monomios? Si lo son, súmalos y réstalos.

a) $3a^2b$ y $2ab^2$
b) $-5x^4y$ y $8x^4y$
c) $\frac{1}{3}mn^2$ y $\frac{1}{3}m^2n$
d) $3fg$ y $4fg$
e) $\frac{2}{5}km^4$ y $\frac{3}{5}m^4p$
f) dfn^2 y sfn^2

28 Escribe un monomio en cada caso.

a) Semejante a y^2x^4.
b) Con grado 4 y las incógnitas j y f.
c) Con las mismas incógnitas que $7x^3y^2$.
d) Con cuatro incógnitas y grado 8.
e) No semejante a $-9x^4y$.
f) Con coeficiente negativo y fraccionario y grado 3.

29 Efectúa, si es posible, las siguientes operaciones con monomios.

[illegible] $+$ [illegible]$xy^2 + 2xy^2$

[illegible] $\frac{2}{3}x^5$

[illegible] $- 4x^2y^3$

30 Opera los siguientes monomios.

a) $7x^2 \cdot 2x \cdot (-3x)$

b) $8x^3 \cdot \frac{3x}{4x^2}$

c) $\frac{-4x^2 \cdot 5x^2}{10x^4}$

d) $6xy^4 \cdot 2x^3y \cdot \frac{1}{24x^2y^3}$

e) $\frac{3x^2y^4 - 2x^2y^4}{5xy^3}$

31 Calcula, respetando la jerarquía de las operaciones.

a) $-\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}x \cdot 6x^2$

b) $6x^3y^4 \cdot \left(-\frac{1}{3}xy + \frac{1}{2}xy\right)$

c) $\frac{8x^4y^2 - 3x^4y^2}{7x^2y - 2x^2y} - x^2y$

d) $\left(\frac{7}{5}x^3y + \frac{3}{5}x^3y\right) : \left(\frac{1}{3}x^2y - \frac{4}{3}x^2y\right)$

Polinomios

32 Indica los términos, el término independiente y el grado de estos polinomios.

a) $-5x^5 + 3x^4 - x^3 + x^2 - 7$
b) $24x^7 + 8x^4 - 10x^3$
c) $4x^3 - 12x^2 + 11x - 9$
d) $-6x^{10} - 3x^6 + 7x^4 + 8x^2 - 1$
e) $-12x^7 + 5x^6 + 3x^3 + 2x^2 - 8$
f) $4x^8 - \frac{1}{2}x^6 - 3x^4 + 4x$

33 Identifica los coeficientes en cada uno de los términos de los siguientes polinomios. ¿Cuáles son los términos independientes?

a) $-2x^3 + 6x^2 - 3x + 4$
b) $x^5 + x^4 - x^3 - x^2 + 5x - 6$
c) $-\frac{3}{2}x^5 - \frac{2}{3}x^4 + 8x$
d) $7x^3 + 2x^2 - 12x - 9$
e) $-4x^5 - 3x^3 + 6$
f) $-9x^7 - \frac{1}{2}x^4 + 6x^3 + 8x - 10$

34 Halla el valor numérico de los siguientes polinomios para los valores de x que se indican.

a) $-2x^4 + 3x - 1$ para $x = 1$

b) $4x^2 + 5x - 4$ para $x = -1$

c) $-3x^3 + 6x^2 - 5$ para $x = 2$

d) $5x^5 - 8x^3 + 4x^2 - 12$ para $x = -1$

e) $-6x^4 - 2x^3 + 5x + 28$ para $x = -2$

f) $x^7 - 4x^6 + 2x^5 - 3x^4$ para $x = 1$

g) $2x^3 + x^2 - 4x - 50$ para $x = 3$

h) $4x^6 + 3x^5 + x^4$ para $x = -3$

35 Halla el valor de k en cada caso, conociendo el valor numérico indicado.

a) $x^4 - (2k + 1)x + 8$ si $P(2) = 10$

b) $3x^3 + 2kx^2 - (k + 3)x - 3$ si $P(-1) = 3$

c) $5x^3 - 2x^2 - (k^2 - 2)x + 4$ si $P(1) = 0$

d) $(3k + 1)x^4 - 4x^3 + 3kx - 3$ si $P(1) = 6$

e) $x^3 + 2x^2 - 4k^2x - 16$ si $P(-2) = 16$

Operaciones con polinomios

36 Efectúa las siguientes sumas y restas de polinomios.

a) $(6x^5 - 12x^4 + 4x^2 - 1) + (-4x^5 + 7x^4 + 8)$

b) $(5x^3 + 7x^2 - 3x + 5) - (-2x^3 + x - 1)$

c) $(-x^4 + 6x^2 - 8x + 4) - (4x^4 - x^3 + 3x + 5)$

d) $(x^3 - x^2 + 8x - 9) + (-6x^3 + x^2 + 11)$

e) $(-10x^6 - 4x^5 + 2x^2 + 3) - (5x^6 + 3x^2 + 7)$

f) $(-x^3 - 2x^2 + 12) - (-2x^3 + x^2) + (x - 9)$

g) $(6x^5 + 3x^4 - x) + (-5x^5 + 2x^4) - (5x - 1)$

37 Dados los polinomios:

$$P(x) = -4x^3 + 5x - 2$$
$$Q(x) = 3x^2 + 6x - 4$$
$$R(x) = x^4 - 2x^3 - x^2$$

efectúa las operaciones siguientes.

a) $P(x) - 2Q(x)$

b) $3R(x) + P(x)$

c) $-2R(x) - Q(x)$

d) $Q(x) + 2P(x) - 3R(x)$

e) $3P(x) - 5R(x) + Q(x)$

f) $4Q(x) + 2P(x) - R(x)$

38 Realiza las siguientes operaciones con los polinomios que se indican.

$$P(x) = 2x^2 - 8x$$
$$Q(x) = 4x^4 - x + 5$$
$$R(x) = -2x^3 + x - 1$$

a) $P(x) \cdot Q(x)$

b) $P(x) \cdot R(x)$

c) $Q(x) \cdot R(x)$

d) $(P(x) + R(x)) \cdot Q(x)$

e) $R(x) \cdot (2P(x) - Q(x))$

f) $(Q(x) - R(x)) + 2 \cdot (P(x) - Q(x))$

g) $P(x) \cdot Q(x) - Q(x) \cdot R(x)$

39 Realiza estas divisiones.

a) $(6x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 1) : (x^2 + 3)$

b) $(5x^3 + x^2 - 4x + 6) : (x + 4)$

c) $(-8x^6 + x^5 + 6x^3 - 6x + 2) : (x^3 - x + 1)$

d) $(2x^4 - 4x^3 + 2x^2) : (x^2 + 1)$

e) $(x^5 - 7x^2 + 4x - 3) : (x^2 - 2x - 1)$

f) $(x^7 - 4x^4 + 2x^3 + 6) : (x^4 - 6)$

g) $(3x^4 - 2x^3 - 4x + 5) : (x^2 - 4)$

h) $(3x^6 + 5x^3 - 3) : (x^3 - 2)$

i) $(x^8 - 1) : (x + 1)$

j) $(x^7 + x^5 + x^3 + 2) : (x^2 + 1)$

Regla de Ruffini

40 Efectúa las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini.

a) $(4x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 9) : (x + 3)$

b) $(-x^5 - 8x^3 + 10) : (x - 4)$

c) $(2x^6 - 3x^3 + 2x - 4) : (x - 1)$

d) $(-5x^4 + x^3 + 2x - 1) : (x + 1)$

e) $(8x^3 - 4x^2 - x + 6) : (x + 2)$

f) $(-2x^4 - 5x^2 + 4x - 4) : (x - 2)$

g) $(3x^2 - 6x + 8) : (x + 2)$

h) $(4x^6 - 2x^4 + 3x^3 - x + 6) : (x - 3)$

i) $(4x^7 + 5x^5 - 2x^3 + 4) : (x - 2)$

j) $(-7x^3 + x^2 - 3x + 5) : (x - 5)$

41 Copia y completa estas divisiones, y escribe los polinomios dividendo, divisor, cociente y resto.

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \square & & & & \\ \hline & & -1 & & \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -1 & 2 \\ \square & & & & \\ \hline & & 2 & & \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r|rrrr} & \square & 0 & 0 & -3 \\ -4 & & & & \\ \hline & & 8 & & \end{array}$$

Igualdades notables

42 Desarrolla las siguientes igualdades notables.

a) $(x-4)^2$
b) $(2x-1)^2$
c) $(-3+4x)^2$
d) $(x-3)\cdot(x+3)$
e) $(1+5x)\cdot(1-5x)$
f) $(4+2x)^2$
g) $(3x^2-2)^2$
h) $(6x^2+2x)^2$
i) $(7x^2+2)\cdot(7x^2-2)$

43 Desarrolla las siguientes igualdades.

a) $(3x+2)^2$
b) $(3x-2)^2$
c) $(3x^2-2x)^2$
d) $(7x^3+4x^2)^2$
e) $(2x+7)\cdot(2x-7)$
f) $(2x^2+3x)\cdot(2x^2-3x)$
g) $(x^4+3x^5)\cdot(x^4-3x^5)$
h) $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2$

44 Copia y completa las siguientes igualdades.

a) $(2x+3)^2=\square+12x+\square$
b) $(5-3x)^2=25-\square+\square x^2$
c) $(9+7x)\cdot(9-7x)=\square-\square$
d) $(\square+\square)^2=x^4+2x^3+x^2$

45 Expresa estos polinomios como igualdades notables.

a) $25x^2-10x+1$
b) $9x^2-4$
c) $9x^2-16$
d) $9x^2-36x+36$
e) x^4-2x^2+1
f) $16x^4+8x^3+x^2$

46 Utiliza las igualdades notables para completar los huecos en tu cuaderno.

a) $(3x-4)^2=9x^2-\square+16$
b) $16x^4-25=(\square)\cdot(\square)$
c) $(4x-5)\cdot(4x+5)=\square-25$
d) $x^2+10x+25=(x+\square)^2$
e) $(x^2+3)^2=x^4+\square+\square$
f) $(-x-8)^2=\square+\square+64$

47 Simplifica las siguientes expresiones transformando los polinomios en igualdades notables.

a) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x^2-9}{x^2+6x+9}$

c) $\dfrac{x^4-4}{x^4+4x^2+4}$

d) $\dfrac{x^2-8x+16}{x^2-16}$

e) $\dfrac{4x^4-20x^2+25}{4x^2-25}$

f) $\dfrac{9x^2-4}{9x^2+12x+4}$

Factor común

48 Saca como factor común el término que se indica en los siguientes polinomios.

a) $2x$ en $4x^4-2x^3-6x^2+8x$
b) $-3x^3$ en $-12x^5+15x^4+18x^3$
c) $5x^2$ en $20x^5+30x^4-15x^3-5x^2$
d) $-4x$ en $-4x^4-8x^3+24x$
e) 8 en $-16x^5+24x^3-8x^2+48$
f) $6x^2$ en $-24x^5+12x^3$

49 Saca factores comunes en los siguientes polinomios.

a) $2x^5-6x^4-5x^3+12x^2$
b) $-4x^6-2x^5+8x^2$
c) $9x^6+27x^4-18x^3$
d) $-21x^4-14x^3+7x$
e) $-16x^3+32x^2$
f) $x^7+5x^6-13x^5$

50 Simplifica las siguientes expresiones sacando factor común.

a) $\dfrac{-12x^5+6x^3-18x^2}{36x^3+27x^2}$

b) $\dfrac{9x^3-27x^2}{81x^2}$

c) $\dfrac{16x^6-12x^4+20x^3}{28x^3+24x^2}$

d) $\dfrac{25x^6+15x^4-10x^3}{5x^4+15x^3}$

e) $\dfrac{32x^6-16x^4+64x^3}{8x^6+48x^3}$

51 Simplifica o desarrolla estas expresiones.

a) $7x^2 - 14x + 7$
b) $16x^2 + 64x + 64$
c) $x^3 - 2x^2 + x$
d) $18x^4 - 12x^2 + 2$
e) $(2x + 4) \cdot (x - 2)$
f) $(x - 5) \cdot (x^2 + 5x)$
g) $(-x - 7) \cdot (x - 7)$
h) $(-x^2 + 5) \cdot (-x^2 - 5)$

Factorizar polinomios

52 Descompón en factores los siguientes polinomios sacando factor común.

a) $8x^3 - 4x$
b) $18x^3 + 14x^2$
c) $9x^2 + 12x$
d) $x^6 - 4x^3$
e) $x^3 + 7x^2$
f) $x^4 - x^3$

53 Factoriza estos polinomios aplicando las igualdades notables.

a) $x^2 + 2x + 1$
b) $x^2 + 10x + 25$
c) $4x^4 - 16x^2 + 16$
d) $x^2 - 4$
e) $4x^2 - 16$
f) $9x^6 - 121$

54 Factoriza estos polinomios.

a) $x^2 + 5x + 6$
b) $x^2 + x - 12$
c) $x^2 + 11x + 24$
d) $x^2 + 2x - 24$
e) $x^3 - 13x + 12$
f) $x^3 - 5x^2 - x + 5$
g) $x^3 + 4x^2 - 11x - 30$
h) $x^3 + 8x^2 - 9x - 72$

55 Factoriza los siguientes polinomios.

a) $x^3 - 2x^2 - x + 2$
b) $x^4 - x^3 - x^2 + x$
c) $x^3 - 3x^2 + 4$
d) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$
e) $x^5 + x^4 - x^3 - x^2$
f) $x^4 - 3x^3 + 2x^2$
g) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
h) $x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 24x + 28$

56 Comprueba si la factorización de estos polinomios tiene como factor el polinomio que se indica.

a) $x^3 - 10x^2 + 31x - 30$. Factor $x - 5$
b) $x^3 + 12x - 8$. Factor $x + 2$
c) $x^4 - x^3 + x - 1$. Factor $x - 1$
d) $x^3 + 8x^2 + 9x - 18$. Factor $x + 3$
e) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$. Factor $x - 2$
f) $x^5 + 2x^4 - x - 2$. Factor $x + 2$

57 Calcula los polinomios que tienen estas factorizaciones.

a) $(x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x + 1)$
b) $(x + 4) \cdot (x - 5)$
c) $(x - 6) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$
d) $(x + 3)^2 \cdot (x + 2) \cdot x$
e) $(x - 3) \cdot (x + 3) \cdot (x - 2)$
f) $(x - 1)^2 \cdot (x + 2)^2$

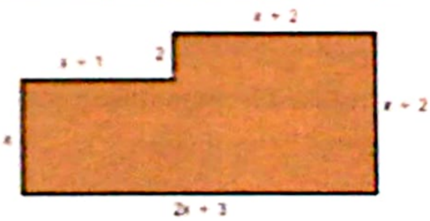
58 Halla el valor de k para que la factorización del polinomio $x^3 + 2kx^2 + (2k + 1)x - 18$ tenga como factor a $x - 1$.

59 Halla el valor de k para que la factorización del polinomio $x^3 - kx^2 + (3k + 1)x - 3k$ tenga como factor a $x - 5$.

Problemas

60 Marcos tiene que hacer un dibujo. La hoja tiene x cm de ancho y 9 cm más de alto. Va a dejar 6 cm de margen por cada lado. Expresa el área que tiene para dibujar como un polinomio de variable x.

61 María tiene que colocar suelo de madera y un rodapié en esta habitación. Expresa el perímetro y el área en función de x. ¿Cuántos metros de rodapié y metros cuadrados de madera debe comprar si $x = 5$?



SABER HACER

Calcular el precio de venta de un producto

Pablo regenta un negocio de platos preparados. Cada mañana cocina una serie de platos que pone a la venta. Para calcular el precio de venta de cada uno de sus productos, tiene en cuenta el precio de los ingredientes que necesita más los costes de la mano de obra para su fabricación.

Si x es lo que cuestan los ingredientes necesarios para hacer una tortilla, su precio final viene dado por $2x^3 + x^2 + 3x$.

a) ¿Qué precio final debe tener la tortilla si hoy las patatas y los huevos que ha necesitado para hacerla le han costado 0,90 €?

Ha calculado que el precio de venta del pollo asado debe ser el doble del cuadrado del coste de los ingredientes que utiliza menos el triple de dicho coste.

b) ¿Qué polinomio expresa el precio de venta del pollo asado?

c) Si el coste de todos los ingredientes que necesita para hacer un pollo es 3,25 €, ¿a qué precio lo debe vender?

En la siguiente tabla, Pablo ha resumido los cálculos de los precios de otros productos de su carta. Ha llamado x al coste de los ingredientes.

Plato	Precio
Espaguetis con carne	$4x^3 - 5x^2 + x$
Flan	$x^4 + 2x$
Tarta de chocolate	$x^3 - 2x^2 + 3x$

Al regresar del mercado, calcula lo que le han costado los ingredientes de cada plato.

Plato	Precio
Espaguetis con carne	1,80 €
Flan	0,82 €
Tarta de chocolate	1,95 €

d) Halla lo que costará comprar cada uno de los platos.