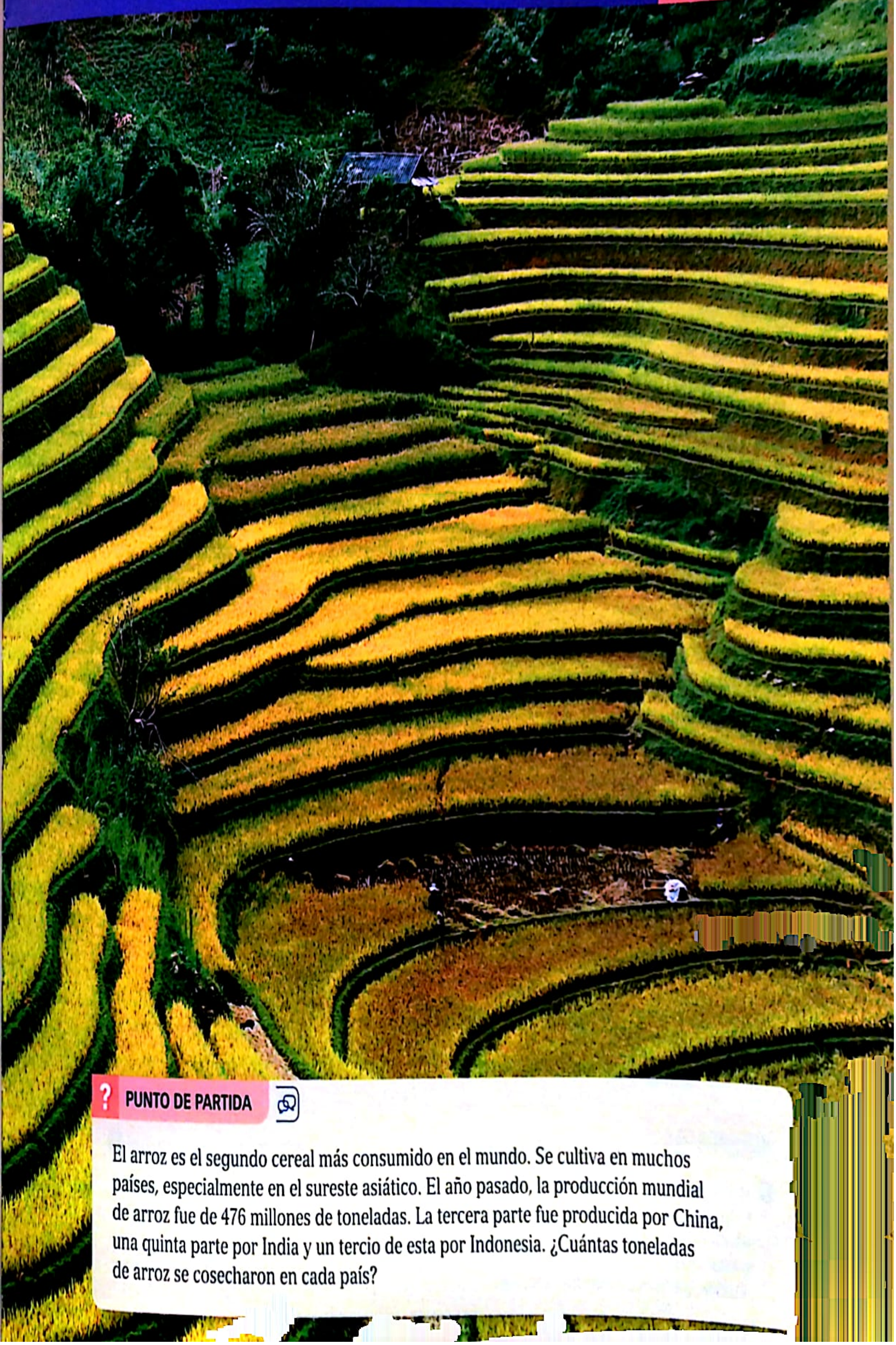
Números racionales e irracionales

1



PUNTO DE PARTIDA

El arroz es el segundo cereal más consumido en el mundo. Se cultiva en muchos países, especialmente en el sureste asiático. El año pasado, la producción mundial de arroz fue de 476 millones de toneladas. La tercera parte fue producida por China, una quinta parte por India y un tercio de esta por Indonesia. ¿Cuántas toneladas de arroz se cosecharon en cada país?

1 Fracciones

$\dfrac{a}{b}$ ← Numerador / ← Denominador

La expresión $\frac{a}{b}$, con a y b números enteros y b es un número distinto de cero, es una **fracción**.

Sirve para representar el número de partes que se eligen de una unidad, para indicar un cociente o como operador de un número.

EJEMPLOS

1. Silvia pasa 6 horas diarias en clase. ¿Qué fracción del día pasa en clase? ¿Se podría expresar ese tiempo mediante otra fracción?

   Silvia pasa 6 de las 24 horas del día en clase. La fracción que representa este tiempo es $\frac{6}{24}$. Es una **fracción propia**, ya que el numerador es menor que el denominador. En caso contrario, la **fracción es impropia**.

   Podemos obtener una **fracción equivalente** a esta, dividiendo o multiplicando numerador y denominador por un mismo número.

   $\frac{6:6}{24:6} = \frac{1}{4}$ → Silvia permanece una cuarta parte del día en clase.

2. Silvia dedica $\frac{1}{3}$ del día a dormir, ¿le dedica más o menos tiempo que a estar en clase?

   Para comparar fracciones de distinto denominador, hallamos otras fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador; esto se llama **reducir las fracciones a común denominador**. Después se comparan los numeradores.

   Para reducir a común denominador, tomamos los denominadores de las fracciones y calculamos sus múltiplos, multiplicándolos por 1, 2, 3...

   Múltiplos de 4 → $4 \cdot 1$, $4 \cdot 2$, $4 \cdot 3$, $4 \cdot 4$, $4 \cdot 5$... → 4, 8, 12, 16, 20, ...

   Múltiplos de 3 → $3 \cdot 1$, $3 \cdot 2$, $3 \cdot 3$, $3 \cdot 4$, $3 \cdot 5$... → 3, 6, 9, 12, 15, ...

   Después, elegimos el menor de los múltiplos comunes, en este caso 12, que será el denominador común de las fracciones:

   $$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12} \qquad \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{4}{12}$$

   Como $3 < 4$, entonces $\frac{3}{12} < \frac{4}{12}$. Silvia pasa más tiempo durmiendo.

Un número es múltiplo de otro cuando la división del primero entre el segundo es exacta, es decir, su resto es cero.

$$\begin{array}{r|l} 84 & 7 \\ \hline 14 & 12 \\ 0 & \end{array}$$

84 es múltiplo de 7.

ACTIVIDADES

1 La ebanistería donde trabajan Arturo y Celia va a realizar 80 puertas de una urbanización. Arturo fabricará dos quintas partes del total y Celia la mitad. ¿Cuántas puertas construirá cada uno? ¿Cuántas quedarán para terminar el encargo?

2 Compara estas parejas de fracciones.

a) $\frac{8}{5}$ y $\frac{3}{7}$

b) $\frac{2}{3}$ y $\frac{7}{4}$

c) $\frac{2}{9}$ y $\frac{1}{8}$

d) $\frac{13}{18}$ y $\frac{5}{12}$

2 Operaciones con fracciones

Para **sumar o restar fracciones** con distinto denominador, primero se reducen las fracciones a común denominador y, después, se suman o restan los numeradores dejando el mismo denominador.

Para **multiplicar fracciones**, se multiplican, por un lado, los numeradores y, por otro, los denominadores.

Para **dividir fracciones**, se multiplica la primera fracción por la inversa de la segunda.

EJEMPLOS

3. Resuelve.

a) $\frac{4}{5}+\frac{11}{5}$ Las fracciones tienen el mismo denominador, sumamos los numeradores manteniendo el denominador.

$$\frac{4}{5}+\frac{11}{5}=\frac{4+11}{5}=\frac{15}{5}=3$$

b) $\frac{8}{5}-\frac{3}{4}$ En este caso, los denominadores son distintos. Hay que reducir las fracciones a común denominador.

Múltiplos de 5 → 5, 10, 15, 20, 25, 30, …

Múltiplos de 4 → 4, 8, 12, 16, 20, 24, …

$$\left.\begin{array}{l}\frac{8}{5}=\frac{8\cdot 4}{5\cdot 4}=\frac{32}{20}\\ \frac{3}{4}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{15}{20}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{8}{5}-\frac{3}{4}=\frac{32}{20}-\frac{15}{20}=\frac{32-15}{20}=\frac{17}{20}$$

4. Multiplica y divide las fracciones $\frac{5}{7}$ y $\frac{3}{8}$.

Para multiplicarlas, multiplicamos los numeradores y los denominadores.

$$\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{8}=\frac{5\cdot 3}{7\cdot 8}=\frac{15}{56}$$

Para dividirlas, multiplicamos la primera fracción por la inversa de la segunda.

$$\frac{5}{7}:\frac{3}{8}=\frac{5}{7}\cdot\frac{8}{3}=\frac{5\cdot 8}{7\cdot 3}=\frac{40}{21}$$

ACTIVIDADES

3 Halla los valores de las siguientes operaciones y simplifica los resultados.

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

b) $\frac{2}{3}-\frac{4}{9}$

c) $\frac{1}{8}+\frac{3}{4}-\frac{6}{5}$

d) $\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{3}\right)$

4 Calcula, respetando la jerarquía de las operaciones y, si es posible, simplifica.

a) $\frac{2}{7}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{5}\right)+1$

b) $\left(\frac{7}{5}+\frac{1}{3}\right):\frac{13}{5}-\frac{4}{3}$

3 Expresión decimal de una fracción

Toda fracción tiene una **expresión decimal**, que se obtiene dividiendo el numerador entre el denominador.

Si la fracción tiene como denominador la unidad seguida de ceros, se llama **fracción decimal**. Para determinar el número decimal que representa, se escribe el numerador de la fracción y, contando desde la derecha hacia la izquierda, se separan con una coma tantos decimales como ceros tenga el denominador.

EJEMPLOS

5. Un kilogramo son 1 000 gramos y un litro son 100 centilitros. Expresa como números decimales las cantidades siguientes:

a) 2 387 gramos $\quad \dfrac{2\,387}{1000} = 2{,}387$ kilogramos

b) 25 centilitros $\quad \dfrac{25}{100} = 0{,}25$ litros

6. Obtén la expresión decimal de las fracciones $\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{1}{3}$ y $\dfrac{13}{6}$.

Dividiendo los numeradores entre los denominadores obtenemos:

$$\begin{array}{r|l} 4{,}0 & 5 \\ \hline 0 & 0{,}8 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1{,}0 & 3 \\ \hline 10 & 0{,}333... \\ 10 & \\ 10 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 13 & 6 \\ \hline 10 & 2{,}1666... \\ 40 & \\ 40 & \\ 40 & \end{array}$$

En el primer caso, el resto de la división es 0. Se trata de un número **decimal exacto**.

En los otros dos casos, el resto de la división nunca es 0 y las cifras decimales se repiten indefinidamente. Estos números se llaman **periódicos**. La cifra o cifras que se repiten forman el **período**.

$0{,}333... = 0{,}\hat{3}$ es un número **decimal periódico puro**, porque el período empieza en la primera cifra decimal.

$2{,}1666... = 2{,}1\hat{6}$ es un número **decimal periódico mixto**, porque tiene una cifra decimal que no se repite. A esta cifra se le llama **anteperíodo**.

ACTIVIDADES

5 Expresa como número decimal.

a) $\dfrac{8}{100}$ b) $\dfrac{1427}{1000}$ c) $\dfrac{965}{100\,000}$ d) $\dfrac{57}{10}$

6 Halla la expresión decimal de las siguientes fracciones e indica el tipo de número que obtienes.

a) $\dfrac{9}{5}$ b) $\dfrac{11}{6}$ c) $\dfrac{2}{3}$ d) $\dfrac{8}{11}$

7 Expresa como fracción decimal.

a) 0,245 b) 53,47 c) 0,0016 d) 3,2

8 En una floristería venden ramos de flores de tres precios distintos. Los de 10 € contienen 12 flores, los de 14 €, 16 flores, y los de 19 €, 22 flores. ¿Cuál es el precio de las flores de cada ramo? ¿Qué tipos de números has obtenido?

4 Números irracionales

Un número irracional tiene una expresión decimal con infinitas cifras decimales que no se repiten de forma periódica. Los números irracionales no se pueden expresar como una fracción.

EJEMPLO

7. Halla, con la calculadora, la expresión decimal de estos números y determina de qué tipo son.

a) $\frac{8}{4} = 2$. Es un número natural.

b) $\frac{9}{5} = 1{,}8$. Es un número decimal exacto.

c) $\frac{7}{9} = 0{,}777777777\ldots = 0{,}\widehat{7}$. Es un número decimal periódico puro.

d) $\frac{7}{11} = 0{,}63636363\ldots = 0{,}\widehat{63}$. Es un número decimal periódico puro.

e) $\frac{153}{999} = 0{,}1531531\ldots = 0{,}\widehat{153}$. Es un número decimal periódico puro.

f) $\frac{7}{6} = 1{,}1666666666\ldots = 1{,}1\widehat{6}$. Es un número decimal periódico mixto.

g) $\frac{31}{22} = 1{,}4090909\ldots = 1{,}4\widehat{09}$. Es un número decimal periódico mixto.

h) $\frac{2\,557}{900} = 2{,}84111\ldots = 2{,}84\widehat{1}$. Es un número decimal periódico mixto.

i) $\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$ Es un número irracional. Tiene infinitas cifras decimales que no se repiten periódicamente.

j) $\sqrt{5} = 2{,}236067977\ldots$ Es un número irracional. Tiene infinitas cifras decimales que no se repiten periódicamente.

k) $\sqrt{9} = 3$. Es un número natural.

l) $0{,}121221222122221\ldots$ Es un número irracional. Aunque hay cifras decimales que se repiten, no lo hacen con un orden fijo.

A los números que se pueden escribir en forma de fracción se les llama racionales. Son números racionales todos los números enteros y los decimales exactos y periódicos.

ACTIVIDADES

9 Clasifica estos números en enteros, racionales e irracionales.

$\frac{7}{4}$ $\quad 0{,}\widehat{12}$ $\quad \frac{11}{7}$ $\quad \frac{22}{3}$ $\quad 19$ $\quad \sqrt{21}$

$56{,}2\widehat{1}$ $\quad \frac{6}{2}$ $\quad 3{,}22\widehat{567}$ $\quad 2{,}1234567891011\ldots$ $\quad \sqrt{16}$

10 ¿Son irracionales estos números?

a) 2,449489743...

b) 3,16227766...

c) 5,2487524875...

d) 0,15151515...

5 Aproximaciones y estimaciones

Las operaciones con números decimales pueden ser muy complejas, principalmente cuando tienen un número ilimitado de cifras decimales.

Con el fin de facilitar los cálculos, se utilizan **técnicas de aproximación**, siendo las más usuales el **redondeo** y el **truncamiento**. Operar usando estas técnicas se denomina hacer una **estimación**.

EJEMPLOS

8. Trunca y redondea a las milésimas los números π y $\sqrt{3}$.

Truncar significa eliminar las cifras posteriores a la que se considera, por lo que los números truncados serán:

$$\pi = 3{,}14\underset{}{\overset{\text{Milésima}}{1}}59\ldots \xrightarrow{\text{Truncamiento}} 3{,}141$$
$$\sqrt{3} = 1{,}73\underset{\text{Milésima}}{2}05\ldots \xrightarrow{\text{Truncamiento}} 1{,}732$$

Para redondear un número, primero se trunca. Si la primera cifra suprimida es menor que 5, se deja como está, y si es 5 o mayor que 5, se aumenta en una unidad la última cifra.

$$\pi = 3{,}14159\ldots \xrightarrow{\text{Redondeo}} 3{,}142$$
$$\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots \xrightarrow{\text{Redondeo}} 1{,}732$$

En el caso del número π, estamos redondeando **por exceso**, ya que la aproximación es mayor que el valor real. En $\sqrt{3}$, es **por defecto**, puesto que el resultado es un número inferior al número dado.

9. Sonia ha comprado unos libros que le han costado 6,57; 8,35 y 4,62 €, respectivamente. Haz una estimación de lo que ha gastado redondeando a las décimas.

Redondeamos el precio de cada libro a las décimas y sumamos.

$$6{,}6 + 8{,}4 + 4{,}6 = 19{,}6\,€$$

El precio real de los libros es $6{,}57 + 8{,}35 + 4{,}62 = 19{,}54$ €.

Esta técnica permite hacernos una idea aproximada del dinero gastado, aunque en el cálculo se comete un error.

ACTIVIDADES

11 Trunca y redondea a las centésimas.

1,234 82,745 9,007 15,107 3,555 8,5292

12 Cuatro personas que pesan 51,65; 62,75; 81,82 y 53,85 kilos entran en un ascensor que soporta un máximo de 250 kilos. Estima sus pesos truncando a las unidades. ¿Deberían subir?

13 En sus viajes a Londres, Sergio calcula los precios en euros redondeando el cambio de la libra a las décimas. Si ha comprado unos pantalones que le han costado 49,5 £, sabiendo que 1 € son 0,66 £, ¿cuál ha sido el valor en euros de su estimación? ¿Le resulta útil seguir haciendo esta estimación?

6 Errores

Al hacer aproximaciones, se comete un error con respecto al valor real. Para valorar en qué medida se alejan del valor real se utilizan los **errores absoluto y relativo**.

EJEMPLO

10. Halla los errores absoluto y relativo cometidos cuando redondeamos y truncamos a las décimas la expresión decimal del número $\frac{8}{3}$.

El valor real de este número es $\frac{8}{3} = 2{,}6666666\ldots = 2{,}\hat{6}$.

Redondeando y truncando a las décimas:

$$2{,}\hat{6} \xrightarrow{\text{Redondeo}} 2{,}7 \qquad 2{,}\hat{6} \xrightarrow{\text{Truncamiento}} 2{,}6$$

El **error absoluto** es el valor absoluto de la diferencia entre el valor aproximado y el valor real.

REDONDEO:

$$E_a = \left|2{,}7 - \frac{8}{3}\right| = \left|2{,}7 - 2{,}\hat{6}\right| = \left|0{,}0333333\ldots\right| = 0{,}0\hat{3}$$

TRUNCAMIENTO:

$$E_a = \left|2{,}6 - \frac{8}{3}\right| = \left|2{,}6 - 2{,}\hat{6}\right| = \left|-0{,}06666666\ldots\right| = 0{,}0\hat{6}$$

El error al truncar es siempre mayor o igual que al redondear.

El **error relativo** nos permite conocer la magnitud de error cometido en relación con el valor real del número. Es el valor absoluto del cociente del error absoluto entre el valor real.

REDONDEO:

$$E_r = \left|0{,}0\hat{3} : \frac{8}{3}\right| = \left|0{,}0\hat{3} : 2{,}\hat{6}\right| = 0{,}0125$$

TRUNCAMIENTO:

$$E_r = \left|0{,}0\hat{6} : \frac{8}{3}\right| = \left|0{,}0\hat{6} : 2{,}\hat{6}\right| = 0{,}025$$

En el primer caso, hemos cometido un error del 1,25 % y, en el segundo, un error del 2,5 %.

El valor absoluto de un número es igual al número sin su signo.

$|+3| = 3 \qquad |-3| = 3$

Para expresar un número decimal como un porcentaje se multiplica el número por 100 y se redondea si es necesario.

$0{,}0125 \cdot 100 = 1{,}25 \rightarrow 1{,}25\,\%$

$0{,}025 \cdot 100 = 2{,}5 \rightarrow 2{,}5\,\%$

ACTIVIDADES

14 Javier tiene que cortar un tubo de acero de 1 m en 8 partes iguales. Los trozos que obtiene miden 12 cm. ¿Cuál es el error absoluto y relativo que ha cometido al hacerlo?

15 Al llegar a la meta de una carrera, Óscar cree que ha corrido a una media de 27 km/h. Su entrenador le dice que ha cometido un error por exceso del 3 %. ¿A qué velocidad se ha desplazado?

16 El médico ha recomendado a Julia que tome diariamente una dosis de 10 ml de un jarabe. Si el frasco tenía 125 ml y le ha durado 11 días, ¿qué dosis diaria ha tomado en realidad? ¿Qué error ha cometido con respecto a la indicación del médico?

17 Halla los errores cometidos cuando tomamos el valor 1,4 para $\sqrt{2}$.

7 Potencias de números racionales

a^n → Exponente
→ Base

- **Una potencia de un número racional de exponente positivo,** $\left(\frac{a}{b}\right)^n$, es el producto del número $\frac{a}{b}$ por sí mismo n veces. El resultado equivale a elevar el numerador y el denominador al exponente n.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n \text{ veces}} = \frac{a^n}{b^n}$$

- **En una potencia de exponente negativo,** $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$, se invierte la fracción y se cambia el signo del exponente.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$$

Para hallar potencias con la **calculadora**, utilizamos la tecla $x^\blacksquare$.

Por ejemplo, para calcular $\left(\frac{3}{5}\right)^4$ tecleamos:

(3 ÷ 5) $x^\blacksquare$ 4 = 0.1296

EJEMPLO

11. Calcula las siguientes potencias de números racionales.

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$

Si la base es positiva, el resultado es siempre positivo.

b) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = \left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3^3}{4^3} = -\frac{27}{64}$

Si la base es negativa y el exponente impar, el resultado es negativo.

c) $\left(-\frac{3}{4}\right)^4 = \left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3^4}{4^4} = \frac{81}{256}$

Si la base es negativa y el exponente par, el resultado es positivo.

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$. Una potencia con exponente 0 es siempre 1.

e) $\left(\frac{8}{5}\right)^1 = \frac{8}{5}$. Si el exponente es 1, el resultado es la misma fracción.

f) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$

g) $\left(-\frac{5}{6}\right)^{-4} = \left(-\frac{6}{5}\right)^4 = \left(\frac{6}{5}\right)^4 = \frac{6^4}{5^4} = \frac{1296}{625}$

ACTIVIDADES

18 Calcula el resultado de estas potencias.

a) $\left(-\frac{5}{2}\right)^4$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^6$ c) $\left(-\frac{3}{7}\right)^5$ d) $\left(\frac{1}{5}\right)^3$

19 Resuelve las siguientes potencias.

a) $\left(-\frac{8}{3}\right)^0$ b) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$ c) $\left(-\frac{1}{7}\right)^{-4}$ d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$

8 Operaciones con potencias

- Para **multiplicar dos potencias** con la misma base, se mantiene la base y se suman los exponentes. $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$
- Para **dividir dos potencias** con la misma base, se mantiene la base y se restan los exponentes. $\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$
- Para **elevar una potencia a otra potencia**, se mantiene la base y se multiplican los exponentes. $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n\cdot m}$

Estas propiedades solo se pueden aplicar cuando las potencias tienen la misma base.

EJEMPLO

12. Realiza las siguientes operaciones entre potencias de números racionales.

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^{2+4} = \left(\frac{2}{5}\right)^6 = \frac{2^6}{5^6}$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{5}\right)^{2+(-4)} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5^2}{2^2}$

c) $\left(\frac{7}{3}\right)^8 : \left(\frac{7}{3}\right)^3 = \left(\frac{7}{3}\right)^{8-3} = \left(\frac{7}{3}\right)^5 = \frac{7^5}{3^5}$

d) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-8} : \left(\frac{7}{3}\right)^3 = \left(\frac{7}{3}\right)^{-8-3} = \left(\frac{7}{3}\right)^{-11} = \left(\frac{3}{7}\right)^{11} = \frac{3^{11}}{7^{11}}$

e) $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^3\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^{3\cdot 4} = \left(\frac{2}{5}\right)^{12} = \frac{2^{12}}{5^{12}}$

f) $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^{(-3)\cdot 4} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-12} = \left(\frac{5}{2}\right)^{12} = \frac{5^{12}}{2^{12}}$

g) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^8 : \left(\frac{4}{7}\right)^5 = \left(\frac{4}{7}\right)^{-3+8-5} = \left(\frac{4}{7}\right)^0 = 1$

ACTIVIDADES

20 Efectúa las siguientes operaciones con potencias.

a) $\left(\frac{3}{8}\right)^9 : \left(\frac{3}{8}\right)^5$

b) $\left(-\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^6$

c) $\left(-\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)^{-2}$

d) $\left(\left(\frac{4}{5}\right)^3\right)^8$

e) $\left(\frac{2}{7}\right)^{10} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^4 : \left(\frac{2}{7}\right)^{12}$

f) $\left(\left(\frac{4}{3}\right)^4\right)^{-3} : \left(\frac{4}{3}\right)^7$

21 Calcula las siguientes potencias.

a) $\left(\frac{11}{7}\right)^4 : \left(\frac{11}{7}\right)^5$

b) $\left(\frac{3}{10}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{-1}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

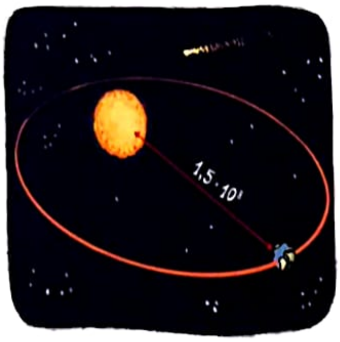
d) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{16} : \left(\frac{1}{6}\right)^{10}$

e) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}\right)^{-2} : \left(\frac{3}{4}\right)^5$

f) $\frac{7}{2} : \left(\frac{7}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2$

9 Notación científica

La notación científica se utiliza para expresar números muy grandes o muy pequeños de forma abreviada. Para ello, se escribe el número como el producto de un número decimal por una potencia de 10, $a \cdot 10^n$, siendo a mayor o igual que 1 y menor que 10.



EJEMPLO

13. Expresa en notación científica los siguientes números.

a) La distancia de la Tierra al Sol es, aproximadamente, 150 000 000 km.

Para números muy grandes:

- Los números distintos de 0 se escriben como un número decimal con una sola cifra en su parte entera.
- Este número se multiplica por 10 elevado al número de cifras que hay desde la parte entera hasta el último 0.

$$\underbrace{150\,000\,000}_{8 \text{ cifras}} = 1{,}5 \cdot 10^8$$

Para comprobarlo, como 10^8 es 100 000 000, al multiplicarlo por 1,5:

$$1{,}5 \cdot 10^8 = 1{,}5 \cdot 100\,000\,000 = 150\,000\,000$$

b) La longitud del virus de la gripe es 0,0000000000879.

Para números muy pequeños:

- Los números distintos de 0 se escriben como un número decimal con una sola cifra en su parte entera.
- El exponente de 10 es negativo y se obtiene contando las cifras que hay desde la coma hasta la parte entera del decimal.

$$\underbrace{0{,}0000000000879}_{11 \text{ cifras}} = 8{,}79 \cdot 10^{-11}$$

Se comprueba multiplicando $10^{-11} = \dfrac{1}{10^{11}} = 0{,}00000000001$ por 8,79:

$$8{,}79 \cdot 10^{-11} = 8{,}79 \cdot 0{,}00000000001 = 0{,}0000000000879$$

Para expresar un número en notación científica con la calculadora, se utilizan las teclas $\boxed{\times 10^x}$ y $\boxed{(-)}$.

Para introducir el número $7{,}352 \cdot 10^9$, tecleamos:

7 $\boxed{\cdot}$ 352 $\boxed{\times 10^x}$ 9

Y para introducir $8{,}64 \cdot 10^{-3}$, tecleamos:

8 $\boxed{\cdot}$ 64 $\boxed{\times 10^x}$ $\boxed{(-)}$ 3

ACTIVIDADES

22 Expresa en notación científica los números que aparecen a continuación.

a) 83 400 000 000 000 000

b) 51 270 000 000 000

c) 0,00000000000000000965

d) 0,0000000001846

e) 9 170 000 000

f) 0,00000000000000000000524

23 Escribe los siguientes números expresados en notación científica de la forma habitual.

a) $4{,}8 \cdot 10^{12}$

b) $5{,}42 \cdot 10^{-9}$

c) $-3{,}7 \cdot 10^{-6}$

d) $9{,}14 \cdot 10^{11}$

e) $7{,}6 \cdot 10^{-10}$

f) $1{,}496 \cdot 10^{7}$

10 Operaciones con números en notación científica

- Para **multiplicar números en notación científica**, se multiplican las expresiones decimales y se suman los exponentes de las potencias de 10.

$$(a \cdot 10^n) \cdot (b \cdot 10^m) = (a \cdot b) \cdot 10^{n+m}$$

- Para **dividir números en notación científica**, se dividen las expresiones decimales y se restan los exponentes de las potencias de 10.

$$(a \cdot 10^n) : (b \cdot 10^m) = (a : b) \cdot 10^{n-m}$$

En ambos casos, puede ser necesario modificar el número resultante para que tenga la forma de notación científica.

EJEMPLO

14. Realiza las siguientes operaciones con números expresados en notación científica.

a) $(1,2 \cdot 10^6) \cdot (4,583 \cdot 10^8) = (1,2 \cdot 4,583) \cdot 10^{6+8} = 5,4996 \cdot 10^{14}$

b) $(2,35 \cdot 10^5) \cdot (6,7 \cdot 10^6) = (2,35 \cdot 6,7) \cdot 10^{5+6} = 15,745 \cdot 10^{11}$

En este caso, la parte entera del número decimal, 15, es superior a 10.

Como tiene que estar comprendida entre 1 y 10, movemos la coma una posición a la izquierda y sumamos 1 al exponente.

$$(2,35 \cdot 10^5) \cdot (6,7 \cdot 10^6) = 15,745 \cdot 10^{11} = 1,5745 \cdot 10^{12}$$

c) $(1,18 \cdot 10^9) : (8,76 \cdot 10^5) = (1,18 : 8,76) \cdot 10^{9-5} = 0,1347 \cdot 10^4$

La parte entera no está comprendida entre 1 y 10.

Cuando la parte entera es 0, movemos la coma una posición a la derecha y restamos 1 al exponente.

$$(1,18 \cdot 10^9) : (8,76 \cdot 10^5) = 0,1347 \cdot 10^4 = 1,347 \cdot 10^3$$

ACTIVIDADES

24 Realiza las siguientes operaciones.

a) $(4 \cdot 10^{-7}) \cdot (6,3 \cdot 10^{12})$

b) $(7,82 \cdot 10^5) \cdot (9,16 \cdot 10^4)$

c) $(1,59 \cdot 10^{17}) : (4,97 \cdot 10^{13})$

d) $(2,23 \cdot 10^{-8}) \cdot (6,42 \cdot 10^5)$

e) $(6,023 \cdot 10^{13}) : (7,02 \cdot 10^{19})$

f) $(1,354 \cdot 10^{-5}) : (9,43 \cdot 10^{-8})$

g) $(1,22 \cdot 10^{-3}) \cdot (4,2 \cdot 10^{-5})$

h) $(5,39 \cdot 10^{-12}) : (5,45 \cdot 10^{-6})$

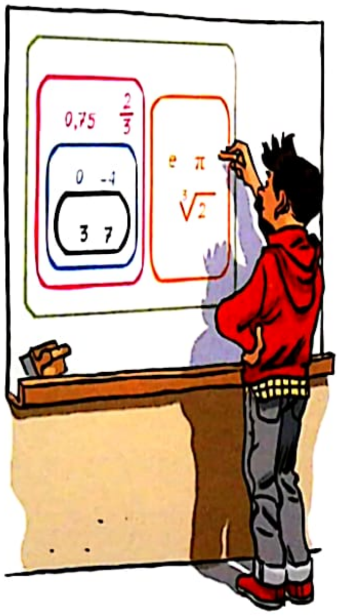
25 El número normal de glóbulos rojos en la sangre para un adulto sano es:

- Hombre: de 4,7 a 6,1 millones de células por microlitro.
- Mujer: de 4,2 a 5,4 millones de células por microlitro.

Expresa estas cantidades en células por litro (1 microlitro $= 10^{-6}$ litros).

Si una persona tiene 5,5 litros de sangre en el cuerpo, ¿cuántos glóbulos rojos tendrá en total? Expresa en notación científica las cantidades mínimas y máximas.

11 Números reales. La recta real



El conjunto de los **números reales** está formado por los números racionales y los irracionales. Se denota por **R**.

En la **recta real** se representan ordenadamente los números reales.

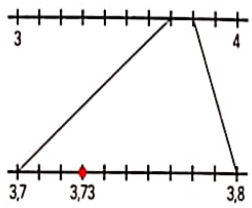
EJEMPLOS

15. Representa en la recta real el número 3,73.

Buscamos los enteros más próximos a 3,73; en este caso, 3 y 4.

Dividimos el segmento en 10 partes iguales y tomamos las que nos indica la cifra de las décimas, es decir, 7.

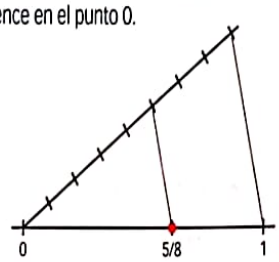
Repetimos el proceso en el segmento comprendido entre 3,7 y 3,8; tomando ahora 3 partes.



16. Representa en la recta real las fracciones $\frac{5}{8}$ y $\frac{16}{7}$.

- Si el numerador es menor que el denominador, tomamos el segmento de la recta real comprendido entre 0 y 1, y trazamos otro segmento sobre él que comience en el punto 0.

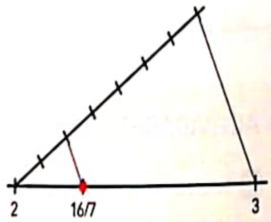
  Dividimos este en tantas partes como indique el denominador, es decir, 8, y unimos el extremo final con el 1 de la recta real. Trazamos una paralela a esta línea que pase por la marca indicada por el numerador.



- Si el numerador es mayor que el denominador, dividimos numerador entre denominador para hallar su cociente y resto.

  $$16 \,\underline{|\,7\,} \quad 2 \;\; 2 \rightarrow \frac{16}{7} = 2 + \frac{2}{7}$$

  Representamos la fracción $\frac{2}{7}$ en el segmento comprendido entre el cociente y el siguiente número entero.



ACTIVIDADES

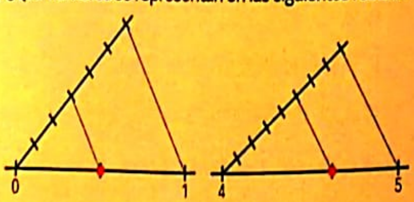
26 Indica si estos números son racionales y reales.

$4{,}59 \quad \sqrt{7} \quad \frac{-9}{8} \quad 0 \quad -5 \quad \sqrt{-3} \quad 8{,}4312 \quad 5 \cdot 10^{-4}$

27 Representa los siguientes números en la recta real.

a) 1,49 b) $\frac{4}{7}$ c) $\frac{8}{3}$ d) $\frac{1}{5}$

28 ¿Qué números se representan en las siguientes rectas?

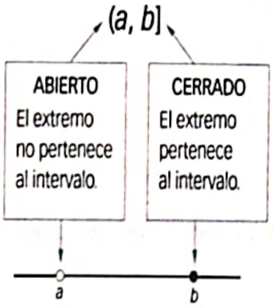


12 Intervalos

Un **intervalo** es un conjunto de números reales delimitado por dos números, a y b, llamados extremos.

- Si los dos extremos pertenecen al intervalo, es un **intervalo cerrado**, y se representa como $[a, b]$. Está formado por los números comprendidos entre a y b, incluyendo a estos.
- Si los extremos no pertenecen, es un **intervalo abierto** y se representa como (a, b). Está formado por los números comprendidos entre a y b, sin incluir los extremos.
- Si solo uno de los extremos pertenece al intervalo, es un **intervalo semiabierto** y se representa por $(a, b]$ o por $[a, b)$, dependiendo del extremo que esté incluido.

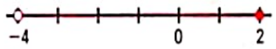
Una **semirrecta** está delimitada por un solo extremo y se representa por $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$, $[a, +\infty)$ o $(a, +\infty)$.



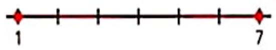
EJEMPLOS

17. Representa en la recta real estos intervalos e indica de qué tipo son.

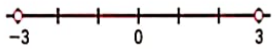
a) $(-4, 2]$ → Semiabierto



b) $[1, 7]$ → Cerrado



c) $(-3, 3)$ → Abierto



18. Determina los valores comprendidos en estas semirrectas y represéntalas.

a) $(-2, +\infty)$ → Todos los números mayores que -2.

b) $(-\infty, 4]$ → Todos los números menores o iguales que 4.

ACTIVIDADES

29 Expresa como intervalos y representa en la recta real los siguientes conjuntos de números reales.

a) Mayores o iguales que -5 y menores que 2.

b) Mayores que 1 y menores o iguales que 8.

c) Comprendidos entre -6 y 9, incluyendo a ambos.

d) Mayores que 0 y menores que 7.

30 Escribe los intervalos que se representan en las siguientes rectas.