

# Números enteros

1



## SABER

- Números enteros. Operaciones con enteros
- Múltiplos y divisores de números enteros
- Factorización de un número entero
- Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

## SABER HACER

- Resolver operaciones de suma y resta con paréntesis
- Resolver operaciones combinadas con números enteros
- Calcular todos los divisores de un número
- Factorizar un número
- Resolver problemas utilizando el m.c.d. o el m.c.m.



## ? VIDA COTIDIANA

### El ascensor

El ascensor es una máquina que sirve para trasladarse verticalmente. La mayoría de nosotros solemos utilizarlo varias veces al día; su uso se hace imprescindible en edificios altos.

- Si hemos aparcado nuestro coche en la planta  $-3$  y subimos por el ascensor a nuestra casa, que está situada en el  $5^{\circ}$  piso, ¿cuántas plantas hemos subido?





# 1

## Números enteros



### SE ESCRIBE ASÍ

Los números enteros positivos se escriben habitualmente sin el signo + delante.

$$+5 = 5 \quad +8 = 8$$

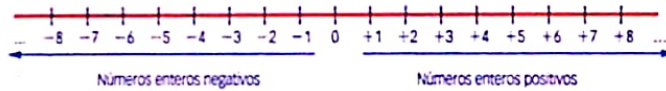
El conjunto de los números enteros se representa con la letra  $\mathbb{Z}$  y está formado por:

- Números enteros positivos:  $+1, +2, +3, +4, +5, \dots$
- El número cero:  $0$ .
- Números enteros negativos:  $-1, -2, -3, -4, -5, \dots$

### 1.1. Representación en la recta numérica

Los números enteros se representan ordenados en la recta numérica.

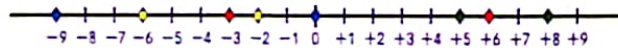
- El cero,  $0$ , divide la recta en dos partes iguales.
- Los enteros positivos se sitúan a la derecha del cero:  $+1, +2, +3, \dots$
- Los enteros negativos se sitúan a la izquierda del cero:  $-1, -2, -3, \dots$



#### EJEMPLO

1. Representa estos números enteros en la recta numérica:

$$-9, -6, -3, -2, 0, +5, +6, +8$$



Valor absoluto:

$$|+a| = a$$

$$|-a| = a$$

### 1.2. Valor absoluto de un número entero

El **valor absoluto** de un número entero  $a$  es el número que se obtiene al prescindir de su signo. Se escribe  $|a|$ .

#### EJEMPLO

2. Halla el valor absoluto de  $-7$  y  $+5$ .

$$\text{Valor absoluto de } -7 \rightarrow |-7| = 7 \quad \text{Valor absoluto de } +5 \rightarrow |+5| = 5$$

### ACTIVIDADES

1 PRACTICA Representa en la recta numérica:

$$-4, +6, -7, +2, -5, +3, -8$$

2 PRACTICA Escribe el valor absoluto de:

- a)  $-9$       b)  $+6$       c)  $+9$       d)  $-4$

3 APLICA ¿Cuántos números enteros están comprendidos entre  $-20$  y  $+20$ ?

4 REFLEXIONA Si dos números enteros, uno positivo y otro negativo, están a la misma distancia del cero, ¿qué relación hay entre sus valores absolutos?



### 1.3. Opuesto de un número entero

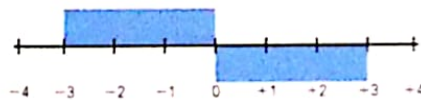
El **opuesto de un número** entero es otro número entero con el mismo valor absoluto pero de signo contrario. El opuesto de  $a$  se representa como  $Op(a)$ .

**EJEMPLO**

3. Halla el opuesto de  $-3$  y  $+3$ . Representalos en la recta numérica.

$Op(-3) = +3$

$Op(+3) = -3$



Dos números opuestos están en la recta a igual distancia del origen.

**SE ESCRIBE ASÍ**

Para «mayor que», el símbolo es  $>$ .  
Para «menor que», el símbolo es  $<$ .

### 1.4. Comparación de números enteros

Un número entero es mayor que otro cuando está situado más a la derecha que él en la recta numérica.

- En un grupo de enteros positivos, es mayor el que tiene mayor valor absoluto.
- En un grupo de enteros negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto.
- Un número entero positivo es mayor que cualquier entero negativo.
- El cero es mayor que cualquier entero negativo y menor que cualquier entero positivo.



**RESUELVE EL RETO**

¿Qué es mayor: el valor absoluto del opuesto de un número o el opuesto de su valor absoluto?

**EJEMPLO**

4. Compara cada pareja de números enteros.

a)  $+6$  y  $+3$

b)  $-4$  y  $-9$

c)  $-8$  y  $+1$

a)  $\left. \begin{array}{l} |+6| = 6 \\ |+3| = 3 \end{array} \right\} 6 > 3 \rightarrow +6 > +3$

b)  $\left. \begin{array}{l} |-4| = 4 \\ |-9| = 9 \end{array} \right\} 4 < 9 \rightarrow -4 > -9$

c)  $-8 < +1$ , ya que un entero negativo es menor que cualquier positivo.

**ACTIVIDADES**

**5 PRACTICA.** Escribe el opuesto de cada número.

$-6, +5, -8, +9, -11, +12, -4$

**7 APLICA.** Ordena de menor a mayor.

$-7, -2, +5, 0, +3, -8, +4, -10$

**6 PRACTICA.** Compara cada pareja de números.

a)  $-3$  y  $+6$

c)  $0$  y  $+5$

e)  $+7$  y  $+8$

b)  $-8$  y  $-2$

d)  $-6$  y  $0$

f)  $-11$  y  $-9$

**8 REFLEXIONA.** Escribe un número entero y calcula el opuesto de su opuesto.

¿Qué observas? ¿Ocurre siempre lo mismo para cualquier número?

## 2

## Operaciones con números enteros

### 2.1. Suma y resta de números enteros

Para **sumar dos números enteros**:

- Si los sumandos tienen el **mismo signo**, se suman sus valores absolutos y al resultado se le pone el mismo signo.
- Si tienen **signo diferente**, se restan los valores absolutos y al resultado se le pone el signo del sumando de mayor valor absoluto.

Para **restar dos números enteros**, se suma al primero el opuesto del segundo.

#### Forma abreviada

$$\begin{aligned} (+a) &= a & +(+a) &= +a & -(+a) &= -a \\ (-a) &= -a & +(-a) &= -a & -(-a) &= +a \end{aligned}$$



#### EJEMPLO

5. Calcula.

a)  $(+5) + (+9) = +14$

Mismo signo  $\rightarrow | +5 | + | +9 | = 5 + 9 = 14$

b)  $(+5) + (-9) = -4$

Distinto signo  $\rightarrow | -9 | - | +5 | = 9 - 5 = 4$ , y ponemos signo  $-$ .

c)  $(+5) - (+9) = (+5) + Op(+9) = (+5) + (-9) = -4$

Para sumar y restar varios números enteros, primero se escriben estos en **forma abreviada**, quitando los paréntesis de los números. Después sumamos los números con signo  $+$ , sumamos los que tienen signo  $-$  y restamos a la suma de los positivos la de los negativos.

#### EJEMPLO

6. Calcula  $(-3) - (+5) - (-9) + (+2)$ .

En forma abreviada:  $-3 - 5 + 9 + 2$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Suma de positivos: } 9 + 2 = 11 \\ \text{Suma de negativos: } 3 + 5 = 8 \end{array} \right\} \text{Resultado: } 11 - 8 = 3$$

### ACTIVIDADES

9. PRACTICA. Calcula.

a)  $(-3) + (-7)$

c)  $(-3) - (-7)$

b)  $(+8) + (-4)$

d)  $(+8) - (-4)$

10. PRACTICA. Expresa abreviadamente y calcula.

a)  $(+3) + (-2) - (-5) - (+2)$

b)  $(-1) - (-4) + (+6) - (+2)$

11. APLICA. Calcula.

a)  $7 - 2 + 4 - 5 - 1$

c)  $-4 - 1 - 5 + 7 + 4$

b)  $-3 + 2 - 1 - 6 - 2$

d)  $6 + 2 - 3 + 4 - 5$

12. REFLEXIONA. Completa en tu cuaderno.

a)  $(+3) + \square = -9$

c)  $\square + (-1) = +1$

b)  $(-5) - \square = +1$

d)  $\square - (-2) = +4$



➔ SABER HACER

 Resolver operaciones de suma y resta con paréntesis

Calcula el resultado de esta operación:

$$-5 - (-3 + 2) + (4 - 6)$$

Pasos a seguir

1. Eliminamos los paréntesis.  
Si el paréntesis tiene delante un signo  $-$ , los signos de los números de dentro cambian.  
Si va delante un signo  $+$ , los números mantienen su signo.

$$\begin{aligned} & -5 \ominus (-3 + 2) \oplus (4 - 6) = \\ & \text{Signo } - \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \text{Signo } + \\ & = -5 + 3 - 2 + 4 - 6 \end{aligned}$$

2. Calculamos el resultado de la expresión abreviada obtenida como ya sabemos.

$$\begin{aligned} \text{Suma de positivos: } & 3 + 4 = 7 \\ \text{Suma de negativos: } & 5 + 2 + 6 = 13 \\ \text{Resta: } & 7 - 13 = -6 \\ -5 - (-3 + 2) + (4 - 6) & = -6 \end{aligned}$$

Para sumar y restar varios números enteros sin paréntesis, también se pueden resolver las operaciones en el orden en que aparecen.

$$\begin{aligned} & -5 + 3 - 2 + 4 - 6 = \\ & = -2 - 2 + 4 - 6 = \\ & = -4 + 4 - 6 = -6 \end{aligned}$$

ACTIVIDADES

13 Expresa en forma abreviada y calcula.

- a)  $(-2) - (-7) - (+4) - (-3) + (+2)$
- b)  $(+5) - (+4) - (+2) + (-1) + (-3)$
- c)  $(-1) - (-1) - (+1) + (-1) - (-1)$
- d)  $(+4) - (+2) - (-5) + (-1) - (-2)$
- e)  $(-5) - (+3) + (-1) + (+2) - (-5)$
- f)  $(+1) - (+2) + (+3) - (+7) - (-8)$

14 Calcula.

- a)  $3 - 6 - 7 + 2 - 4 - 5 + 1$
- b)  $-2 - 2 - 4 + 6 + 3 + 5$
- c)  $6 - 1 - 2 - 4 + 5 + 2$
- d)  $-8 - 1 - 2 + 4 - 1 + 3 - 7$
- e)  $2 + 3 - 1 + 4 - 6 - 7 + 5$

15 Efectúa estas operaciones eliminando primero los paréntesis.

- a)  $(4 - 1) - (2 - 3)$
- b)  $(8 + 2) + (3 - 5)$
- c)  $(-8 + 10) - (10 - 8)$
- d)  $(-4 - 5) - (7 + 2)$
- e)  $(9 - 3) + (5 - 9)$

16 Halla el resultado de estas operaciones.

- a)  $-9 + (3 - 2 - 1) + 7$
- b)  $4 + (6 - 3) - (2 - 1)$
- c)  $-7 - (4 - 6) - (1 + 5)$
- d)  $5 - (4 + 2 + 3) - 6$
- e)  $-3 - (-1 - 2 - 3) + (5 - 1)$

17 Calcula.

- a)  $-8 - (-3 - 2 + 1 - 4) + 5$
- b)  $2 + (1 + 5 - 6 - 3) - 8$
- c)  $-1 - (-2 - 3 + 4) - (1 - 5)$
- d)  $-(2 - 1) + (-4 + 2) - 11$
- e)  $9 - (2 - 5) + (3 - 1 - 2) - 4 - 7$
- f)  $-4 + (-1 + 6) - (-2 + 1 - 3 + 5) + 6$

18 Completa estas operaciones para que todas las igualdades sean ciertas.

- a)  $-1 - (-2 - \square) = 4 = -5 + \square$
- b)  $(1 + \square - 3) - 1 = -1 = 6 - \square$
- c)  $3 - (\square - 1) = -3 = \square + 4$
- d)  $(5 - \square + 1) - 2 = -4 = \square + 2$
- e)  $9 + (2 - \square - 3) = 13 = -7 - \square$



## 2.2. Multiplicación de números enteros

Regla de los signos

$+-=+$	$+:+=+$
$---=+$	$-:-=+$
$+--=-$	$+:-=-$
$-+-=-$	$-:+=-$



Para **multiplicar dos números enteros**, primero se multiplican sus valores absolutos. El resultado tendrá el signo  $+$  si los dos factores tienen el mismo signo y signo  $-$  si tienen signos diferentes.

### EJEMPLO

7. Calcula.

Mismo signo  $\rightarrow$  Resultado  $+$

Distinto signo  $\rightarrow$  Resultado  $-$

a)  $(+3) \cdot (+4) = +12$

c)  $(+3) \cdot (-4) = -12$

b)  $(-3) \cdot (-4) = +12$

d)  $(-3) \cdot (+4) = -12$

Para calcular el producto de varios números enteros, se multiplican sus valores absolutos. El resultado tendrá signo  $+$  si el número de factores negativos es par, y tendrá signo  $-$  si es impar.

### EJEMPLO

8. Calcula.

a)  $(+5) \cdot (+8) \cdot (-2) = -80$

b)  $(-10) \cdot (+3) \cdot (-5) = +150$

## 2.3. División de números enteros

Para **dividir dos números enteros**, primero se dividen sus valores absolutos. El resultado tendrá el signo  $+$  si los dos factores tienen el mismo signo y signo  $-$  si tienen signos diferentes.

### EJEMPLO

9. Calcula.

Mismo signo  $\rightarrow$  Resultado  $+$

Distinto signo  $\rightarrow$  Resultado  $-$

a)  $(+35) : (+7) = +5$

c)  $(+35) : (-7) = -5$

b)  $(-35) : (-7) = +5$

d)  $(-35) : (+7) = -5$

### RESUELVE EL RETO

Encuentra dos números enteros cuyo cociente sea mayor que ellos.

### ACTIVIDADES

20 PRACTICA. Calcula.

a)  $(-7) \cdot (-4)$

c)  $(+8) \cdot (+9)$

b)  $(-6) \cdot (+10)$

d)  $(+4) \cdot (+5)$

21 PRACTICA. Divide.

a)  $(-63) : (+9)$

c)  $(-14) : (-2)$

b)  $(-24) : (-3)$

d)  $(+35) : (-5)$

22 APLICA. Completa.

a)  $\square \cdot (-7) = +21$

d)  $(+24) : \square = +4$

b)  $(+5) \cdot \square = -35$

e)  $\square : (-7) = +7$

c)  $\square \cdot (+9) = 0$

f)  $(-10) : \square = -10$

23 REFLEXIONA. Halla el signo de un producto de 99 factores con un tercio de ellos negativos.



**SABER HACER**

**Resolver operaciones combinadas con números enteros**

Calcula el resultado de esta operación:

$$(+12) : (-6) - [(-4) : (+2)] : (-2) + (-3) \cdot (-2) - (-6 - 1)$$

Pasos a seguir

1. Realizamos las operaciones que hay entre paréntesis y corchetes.
2. Calculamos las multiplicaciones y divisiones en el orden en el que aparecen.
3. Calculamos las sumas y restas en el orden en el que aparecen.

$$\begin{aligned} & (+12) : (-6) - [(-4) : (+2)] : (-2) + (-3) \cdot (-2) - (-6 - 1) = \\ & = (+12) : (-6) - (-2) : (-2) + (-3) \cdot (-2) - (-7) = \\ & = -2 - 1 + 6 - (-7) = \\ & = -3 + 6 + 7 = \\ & = 3 + 7 = \\ & = 10 \end{aligned}$$

Recuerda que al resolver las operaciones que hay entre paréntesis, el resultado queda entre paréntesis

$$\begin{aligned} 2 - (-6 - 1) &= 2 - (-7) = \\ &= 2 + 7 = 9 \end{aligned}$$

**ACTIVIDADES**

23 Calcula.

- a)  $(-2) \cdot (-7) : (+14)$
- b)  $(+12) : (-2) \cdot (+3)$
- c)  $(-15) : (-3) : (-5)$
- d)  $(+4) \cdot (+2) - (-5) : (+5)$
- e)  $(-8) : (+4) - (+16) : (-2)$
- f)  $6 - (+10) : (-2) + (+9) \cdot (-1)$

24 Completa los huecos en tu cuaderno.

- a)  $(-12) : (+6) - 1 = 3 - \square$
- b)  $(+10) : [(+2) : (-2)] = 5 + \square$
- c)  $6 - (-8) : (+2) = \square - 4$
- d)  $(+5) \cdot (+3) + 2 = \square + 3$

25 Efectúa estas operaciones.

- a)  $9 - (+8) : (-4) - 2 + (+3) \cdot (+2)$
- b)  $9 - (+8) : (-4) : (+11) - (+6) : (-3)$
- c)  $-5 - [4 - 1 + 3] : (+2) - (10 - 8)$
- d)  $-6 : (3 - 2 - 2) - (1 - 2 + 3)$
- e)  $4 \cdot [3 - 2 \cdot (-5)] - 12 : 3 + 6 : 2$
- f)  $5 \cdot (-2) - [10 + 2 \cdot (-4)] : 2 - (-12) : 6$

26 Averigua qué operaciones están bien hechas.

- a)  $-9 + (8 - 2 - 1) : (-5) = 10$
- b)  $4 - (-6 - 3) : (-2 - 1) = 1$
- c)  $(-7 - 1) : 4 - (6 - 2) : (-2) = -6$
- d)  $(-5 - 1 + 2 + 8) : (-2 - 1 - 1) = -1$
- e)  $-3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - (5 - 6 + 2) = 13$

27 ¿Qué operaciones dan el mismo resultado?

- a)  $-8 - 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 1$
- b)  $4 - (6 - 2 + 3) \cdot 5$
- c)  $5 + 6 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 - 2$
- d)  $(12 - 14 + 6) \cdot (-7) + 2$
- e)  $2 \cdot (5 - 1 - 7) : 6 - 4$
- f)  $-9 : (6 + 2 - 1 - 4) - 8$

28 Coloca los paréntesis para que las igualdades sean ciertas.

- a)  $-1 - 2 \cdot 3 + 4 = -11$
- b)  $4 + 5 - 6 \cdot 2 - 3 = 3$
- c)  $4 + 5 - 6 \cdot 2 - 3 = 15$
- d)  $8 - 3 + 2 + 4 \cdot 6 = 31$



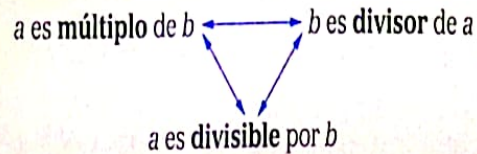
## 3

## Múltiplos y divisores de números enteros



La divisibilidad se suele estudiar solo en los números enteros positivos, ya que para los negativos se cumplen las mismas propiedades.

Si la división  $a : b$  es exacta, se cumple que:



El conjunto de todos los múltiplos de un número se obtiene multiplicándolo por los sucesivos números enteros positivos. Se representa por  $\dot{a}$ . Un número tiene infinitos múltiplos.

$$\dot{a} = \{a \cdot 1, a \cdot 2, a \cdot 3, \dots\}$$

El conjunto de todos los divisores de un número se obtiene realizando las sucesivas divisiones por los números positivos menores que él y seleccionando aquellos cuya división es exacta. Se representa por  $\text{Div}(a)$ .

## EJEMPLOS

10. Calcula los primeros cinco múltiplos de 9.

$$\text{Múltiplos de } 9 \rightarrow \dot{9} = \{9 \cdot 1, 9 \cdot 2, 9 \cdot 3, 9 \cdot 4, 9 \cdot 5, \dots\} = \{9, 18, 27, 36, 45, \dots\}$$

11. ¿Es 8 divisor de 12? ¿Y de 16?

8 no es divisor de 12 porque la división  $12 : 8$  no es exacta.

8 sí es divisor de 16 porque  $16 : 8 = 2$ .

Un número es **primo** cuando es positivo y sus únicos divisores son él mismo y la unidad. En caso contrario, es **compuesto**.

## EJEMPLO

12. Determina si los números 11 y 33 son primos o compuestos.

$\text{Div}(11) = \{1, 11\} \rightarrow$  Dos divisores: es un número primo.

$\text{Div}(33) = \{1, 3, 11, 33\} \rightarrow$  Más de dos divisores: es compuesto.

## RESUELVE EL RETO

¿Cuál es el menor múltiplo de un número? ¿Y su menor divisor?

¿Cuál es el mayor divisor de un número?



**SABER HACER**

**Calcular todos los divisores de un número**

Halla todos los divisores de 48.

Pasos a seguir

1. Dividimos el número entre los números naturales (1, 2, 3...) hasta llegar a una división en la que el cociente sea menor que el divisor.

$$\begin{array}{r} 48 \overline{)1} \\ 0 \ 48 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 48 \overline{)2} \\ 0 \ 24 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 48 \overline{)3} \\ 0 \ 16 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 48 \overline{)4} \\ 0 \ 12 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \overline{)5} \\ 3 \ 9 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 48 \overline{)6} \\ 0 \ 8 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 48 \overline{)7} \\ 6 \ 6 \\ \hline \end{array}$$

Paramos de dividir, el cociente es menor que el divisor  $6 < 7$

2. De cada división exacta, obtenemos dos divisores de ese número: el divisor y el cociente.

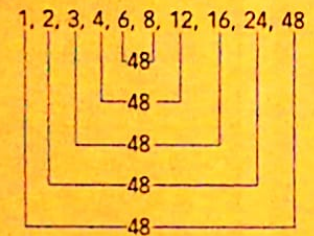
$48 : 1 = 48 \rightarrow 1$  y 48 son divisores de 48.  
 $48 : 2 = 24 \rightarrow 2$  y 24 son divisores de 48.  
 $48 : 3 = 16 \rightarrow 3$  y 16 son divisores de 48.  
 $48 : 4 = 12 \rightarrow 4$  y 12 son divisores de 48.  
 $48 : 6 = 8 \rightarrow 6$  y 8 son divisores de 48.

El resto de divisiones no son exactas.

Los divisores de 48 son:

$\text{Div}(48) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$

Si ordenas los divisores de un número y multiplicas los que están en sus extremos, obtienes ese número.



**ACTIVIDADES**

33 Halla todos los divisores de estos números y averigua cuáles son primos.

- a) 18                      d) 80                      g) 42
- b) 31                      e) 79                      h) 41
- c) 32                      f) 37                      i) 96

34 Calcula todos los divisores de estos números y averigua cuáles son primos.

- a) 199                      c) 582                      e) 856
- b) 424                      d) 603                      f) 1021

35 Estos son todos los divisores de un número. Completa en tu cuaderno los que faltan. ¿De qué número se trata en cada caso?

- a)  $\{1, \square, \square, 8\}$                       c)  $\{1, 2, 3, 5, \square, 10, 15, \square\}$
- b)  $\{1, 5, \square\}$                       d)  $\{\square, 2, 4, \square, 8, 10, \square, 40\}$

36 Halla los divisores de 24 y de 30. ¿Qué números aparecen en las dos listas? ¿Cuál es el mayor de sus divisores comunes?

37 ¿Tienen algún divisor común estas parejas de números?

- a) 24 y 49                      b) 48 y 95                      c) 33 y 102

38 Razona si es verdadero o falso.

- a) Todo múltiplo de un número es mayor que ese número.
- b) Todo número es divisor de su doble y de su triple.
- c) Existe un número que es divisor de todos los números.
- d) Todos los números impares son primos.
- e) Todos los números primos, salvo el 2, son impares.

39 María tenía un montón de lápices. Al agruparlos de 3 en 3 le ha sobrado 1. ¿Cuántos lápices puede tener María? Escribe cinco posibles soluciones.



40 Marcos quiere repartir 60 DVD en cajas de manera que en todas haya el mismo número de DVD y no sobre ninguno.

- a) ¿Cuántos DVD puede poner en cada caja?
- b) ¿Cuántas cajas obtendrá en cada caso?



# 4 Factorización de un número entero

## 4.1. Criterios de divisibilidad

Los **criterios de divisibilidad** son reglas que nos permiten averiguar, sin dividir, si un número es divisible por otro.

Los criterios más útiles son los asociados con los números primos:

Divisible por	Criterio de divisibilidad
2	Si la última cifra es 0 o par.
3	Si la suma de sus cifras es divisible por 3.
5	Si la última cifra es 0 o 5.
11	Si la diferencia entre la suma de las cifras de lugar par y la suma de las cifras de lugar impar es 0 o divisible por 11.

### EJEMPLO

13. Averigua si 3 036 es divisible por 2, 3, 5 u 11.

Es divisible por 2 porque acaba en cifra par.

Es divisible por 3 porque  $3 + 0 + 3 + 6 = 12$ , que es divisible por 3.

No es divisible por 5, porque su última cifra no es 0 ni 5.

Es divisible por 11 porque  $(3 + 3) - (0 + 6) = 0$ .

## 4.2. Descomposición en factores primos

Todo número entero se puede expresar de forma única como el producto de potencias de números primos. A esta expresión se le llama **factorización del número**.

### EJEMPLO

14. Comprueba que la factorización de 40 es  $2^3 \cdot 5$ .

2 y 5 son primos.  $2^3 \cdot 5 = 8 \cdot 5 = 40$ . Luego es la factorización de 40.



➔ SABER HACER

 Factorizar un número

Descompón el número 702 como producto de factores primos.

Pasos a seguir

1. Dividimos el número entre los sucesivos números primos (2, 3, 5, 7, 11, 13...), tantas veces como se pueda hasta obtener la unidad.

- 702 es divisible por 2.  $702 : 2 = 351$        $702 = 2 \cdot 351$
- 351 no es divisible por 2.  
351 es divisible por 3.  $351 : 3 = 117$        $351 = 3 \cdot 117$
- 117 es divisible por 3.  $117 : 3 = 39$        $117 = 3 \cdot 39$
- 39 es divisible por 3.  $39 : 3 = 13$        $39 = 3 \cdot 13$
- 13 es un número primo.  $13 : 13 = 1$        $13 = 13 \cdot 1$

Esta descomposición se puede escribir de forma abreviada de esta manera:

		FACTORES PRIMOS
	702	2
702 : 2 →	351	3
351 : 3 →	117	3
117 : 3 →	39	3
39 : 3 →	13	13
13 : 13 →	1	1

2. Escribimos el número como producto de los factores primos y si hay algunos repetidos los expresamos como potencias.

La factorización de 702 es:

$$702 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13 = 2 \cdot 3^3 \cdot 13$$

La factorización termina al llegar a un número primo. Al dividir este por sí mismo, obtenemos la unidad.

ACTIVIDADES

44 Halla la factorización de estos números.

- |       |        |        |
|-------|--------|--------|
| a) 15 | e) 55  | i) 400 |
| b) 16 | f) 72  | j) 675 |
| c) 24 | g) 86  | k) 405 |
| d) 29 | h) 270 | l) 943 |

45 Determina si los siguientes números están bien factorizados. En caso de que no sea así escribe la factorización correcta.

- |                             |                               |
|-----------------------------|-------------------------------|
| a) $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$ | d) $222 = 2 \cdot 3 \cdot 37$ |
| b) $72 = 2 \cdot 6^2$       | e) $360 = 2^3 \cdot 3^2$      |
| c) $104 = 2^3 \cdot 13$     | f) $2\,450 = 5^2 \cdot 7^2$   |

46 Escribe la descomposición factorial de estos números sabiendo que  $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ .

- |        |         |        |        |
|--------|---------|--------|--------|
| a) 210 | b) 1050 | c) 315 | d) 945 |
|--------|---------|--------|--------|

47 Razona si estas afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) En la factorización de un número acabado en 0 hay como mínimo dos factores primos, el 2 y el 5.
- b) Si un número es múltiplo de 6, en su factorización estarán el 2 y el 3.
- c) El menor número que es múltiplo de 2, 3, 5 y 7 a la vez es 210.
- d) Un número puede ser múltiplo de 8 y no ser múltiplo de 2.

48 Del número  $a$  sabemos que su factorización es:

$$a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot b$$

- a) ¿Es un múltiplo de 6? ¿Y de 45?
- b) ¿Podemos decir que el número  $a$  es divisible por 20? ¿Y por 14?

Razona tus respuestas.



## 5

## Máximo común divisor y mínimo común múltiplo



### SE ESCRIBE ASÍ

El máximo común divisor de dos o más números,  $a, b, c, \dots$ , se expresa como:  
m.c.d. ( $a, b, c, \dots$ ).

El mínimo común múltiplo de dos o más números,  $a, b, c, \dots$ , se expresa como:  
m.c.m. ( $a, b, c, \dots$ ).

El **máximo común divisor** de varios números enteros es el mayor número entero positivo que es divisor de todos ellos.

El **mínimo común múltiplo** de varios números enteros es el menor número entero positivo que es múltiplo de todos.

### EJEMPLO

15. Comprueba que  $\text{m.c.d.}(12, 28) = 4$  y  $\text{m.c.m.}(12, 28) = 84$ .

$$\text{Div}(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$\text{Div}(28) = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$$

$$\text{Divisor común más grande} = 4 \rightarrow \text{m.c.d.}(12, 28) = 4$$

$$12 = \{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, \dots\}$$

$$28 = \{28, 56, 84, 112, \dots\}$$

$$\text{Múltiplo común más pequeño} = 84 \rightarrow \text{m.c.m.}(12, 28) = 84$$

### RESUELVE EL RETO

¿Cuál es el m.c.d. de dos números primos?  
¿Cuál es su m.c.m.?

Para **calcular el m.c.d.** de varios números, se descomponen en factores primos y se multiplican los factores primos comunes elevados al menor de sus exponentes.

Para **calcular el m.c.m.** de varios números, se descomponen en factores primos y se multiplican los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor de sus exponentes.

### EJEMPLO

16. Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de 12, 16 y 20.

$$12 = 2^2 \cdot 3 \quad 16 = 2^4 \quad 20 = 2^2 \cdot 5$$

$$\text{m.c.d.}(12, 16, 20) = 2^2 = 4 \quad \text{m.c.m.}(12, 16, 20) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240$$

Cuando  $\text{m.c.d.}(a, b) = 1$ , los números  $a$  y  $b$  no tienen divisores comunes (salvo el 1). Decimos que son primos entre sí.

### ACTIVIDADES

49 **PRACTICA.** Calcula el m.c.d. de cada pareja de números.  
a) 13 y 90    b) 72 y 12    c) 24 y 102    d) 8 y 74

50 **PRACTICA.** Calcula el m.c.m. de estos números.  
a) 8 y 10    b) 55 y 75    c) 9 y 30    d) 4 y 44

51 **APLICA.** Halla el m.c.d. y el m.c.m. de:  
a) 842, 77 y 91    c) 50, 60 y 75  
b) 18, 90 y 360    d) 49, 91 y 119

52 **REFLEXIONA.** Da dos valores de  $x$  para que se cumpla que  $\text{m.c.m.}(x, 8) = 40$ .



**SABER HACER**



**Resolver problemas utilizando el m.c.d. o el m.c.m.**

Resuelve estos problemas.

- a) Claudia tiene tres cintas de 9, 10 y 12 m, respectivamente, que quiere cortar en trozos iguales. ¿Qué longitud tendrán los trozos más largos que puede hacer?
- b) Diego puede colocar los libros de una estantería en montones de 4, 6 u 8 libros sin que le sobre ninguno. ¿Cuántos libros como mínimo tiene Diego?



**Pasos a seguir**

1. Analizamos cada problema y decidimos si hay que hallar el máximo común divisor o el mínimo común múltiplo.

- a) La longitud de cada trozo debe ser divisor de las longitudes de las tres cintas y, además, el máximo posible → Problema de m.c.d.
- b) El número de libros debe ser múltiplo de 4, 6 y 8 y, además, tiene que ser el mínimo múltiplo. → Problema de m.c.m.

2. Descomponemos los números en factores primos.

a) $\begin{array}{r l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$	b) $\begin{array}{r l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$
$9 = 3^2$	$10 = 2 \cdot 5$	$12 = 2^2 \cdot 3$	$4 = 2^2$	$6 = 2 \cdot 3$	$8 = 2^3$

3. Calculamos el m.c.d. o el m.c.m. según corresponda.

- a) m.c.d. (9, 10, 12) = 1
- b) m.c.m. (4, 6, 8) =  $2^3 \cdot 3 = 24$

4. Interpretamos el resultado.

- a) El trozo más largo medirá 1 m.
- b) Tiene como mínimo 24 libros.

Si dos números no tienen divisores comunes, su m.c.d. es 1.

**ACTIVIDADES**

53 Queremos alicatar una habitación rectangular de 520 cm de largo por 240 cm de ancho con baldosas cuadradas, con el lado más grande posible, sin cortar ninguna. ¿Qué medida tendrá que tener cada baldosa?

54 Silvia tiene un reloj que hace una señal cada 30 minutos, otro que la hace cada 90 minutos y un tercero que la hace cada 150 minutos. A las 8 de la mañana, los tres relojes han coincidido al hacer la señal.

- a) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que vuelvan a coincidir los dos primeros?



- b) ¿Y el segundo y el tercero?

55 Juan tiene cubos azules de 55 mm de arista y cubos rojos de 45 mm de arista. Los apila en dos columnas, una de cada color; quiere conseguir que las dos columnas sean igual de altas. ¿Cuántos cubos necesita, como mínimo, de cada color?

56 Mercedes tiene 14 cuentas azul cielo, 16 naranjas, 16 rojas y 10 azul marino. Quiere hacer el mayor número de collares iguales, sin que sobre ninguna cuenta.

- a) ¿Cuántos collares iguales puede hacer?
- b) ¿Cuántas cuentas de cada color tendrá que tener cada collar?

